

Una aproximación teórica a la
superficie de volatilidad en el
mercado colombiano a través del
modelo de difusión con saltos

Por: Carlos León

Núm. 570

2009

Borradores de ECONOMÍA



tá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Col

Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos¹



Carlos León

Banco de la República
Colombia

¹ La serie Borradores de Economía es una publicación de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Los trabajos son de carácter provisional, las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva de los autores y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos[†]

Carlos León^{}*
Banco de la República
Colombia

Resumen

Las opciones no solo son instrumentos que ofrecen la oportunidad de cubrir o aprovechar cambios direccionales en el precio del activo subyacente, sino que permiten valorar la volatilidad de este.

En mercados desarrollados es posible identificar que los agentes sobrevaloran o subvaloran la volatilidad de opciones cuyo precio de ejercicio se aleja del precio del subyacente o cuyo vencimiento se aleja del presente, lo cual resulta en una superficie de volatilidad. Este es un hecho característico y bien conocido, que contradice al modelo más exitoso para valorar opciones (Black & Scholes) y a uno de los supuestos centrales de las finanzas modernas.

En atención al bajo desarrollo del mercado de opciones colombiano, este documento pretende modelar la superficie de volatilidad en el mercado cambiario, de renta fija y variable, para lo cual se utiliza una aproximación teórica basada en el modelo de difusión con saltos.

La aplicación del modelo propuesto consiguió capturar el comportamiento empírico de dichos mercados, lo cual a su vez resultó en que las superficies de volatilidad obtenidas sean intuitivas y coincidan con lo observado en mercados desarrollados.

Las superficies de volatilidad obtenidas pueden servir como punto de partida teórico para valorar opciones y ofrecer nuevos productos financieros, mientras que la habilidad del modelo de difusión con saltos para capturar eventos extremos puede ser de utilidad para otros propósitos, tales como la evaluación de riesgo de mercado.

Palabras claves: superficie de volatilidad (*volatility surface*), volatilidad implícita, difusión con saltos (*jump-diffusion*), Black & Scholes, movimiento browniano, opciones, IDXTES, IGBC, TRM.

Clasificación JEL: G12, G13, C15.

[†] Las opiniones y posibles errores son responsabilidad exclusiva del autor y sus contenidos no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva. El documento se enriqueció con los comentarios, correcciones y apreciaciones de Andrés Gómez, Silvia Juliana Mera, Miguel Sarmiento y Mateo Trujillo. El autor agradece la colaboración de Karen Leiton y Jhónatan Pérez.

^{*} Investigador del Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados de la Subgerencia Monetaria y de Reservas, cleonrin@banrep.gov.co o carlosleonr@hotmail.com.

1. Introducción

Es inherente a la naturaleza humana el tratar de simplificar la realidad con el fin de hacerla comprensible. Las Finanzas y la Economía no son ajenas a este proceso de simplificación. Todos sus modelos son aproximaciones a la realidad, basados en una serie de supuestos que, pese a ser discutibles y hasta refutables, facilitan su comprensión y difusión.

Uno de los supuestos más utilizados en Economía y Finanzas es aquel que señala que el cambio en el precio de los activos se asimila al movimiento browniano, también llamado caminata o paseo aleatorio (*random walk*). Los modelos y teorías más exitosas y difundidas se basan total o parcialmente en este supuesto: el modelo de Black & Scholes (B&S) para la valoración de opciones financieras, el CAPM para la valoración de activos, la teoría de portafolios de Markowitz y la hipótesis de mercados eficientes.

No obstante la evidencia empírica no soporta dicho supuesto, es inobjetable el éxito y difusión de los modelos basados en este; es más, el desarrollo de estos modelos les ha merecido a varios de sus autores el premio Nobel de Economía².

Pese a su amplia difusión y aceptación académica, los participantes de los mercados financieros, enfrentados a la realidad de estos, se han visto en la necesidad de ajustar los modelos teóricos, inclusive violando la integridad de los mismos.

En cuanto al modelo B&S, en contra de los principales supuestos del modelo, los agentes del mercado asignan de manera implícita una volatilidad particular para diferentes precios de ejercicio (*strikes*), en lo que se conoce generalmente como *volatility smile*. Así mismo, asignan una volatilidad particular para diferentes plazos al vencimiento de la opción, con lo cual se conforma una estructura de plazo de la volatilidad. La conjunción de la *volatility smile* y la estructura de plazos conforma la superficie de volatilidad (*volatility surface*), la cual se reconoce como evidencia de la inoperancia del movimiento browniano para explicar los retornos del subyacente en la realidad.

El presente documento tiene tres objetivos principales. El primero es entender el origen del supuesto de movimiento browniano en Finanzas y Economía. El segundo es presentar la manera como los agentes de los mercados financieros ajustan el modelo de B&S para sortear parcialmente el supuesto de movimiento browniano, la cual resulta en la mencionada superficie de volatilidad. El tercero es, con base en el modelo de difusión con saltos (*jump-diffusion*) y en consideración a la ausencia de un mercado de opciones local, presentar una aproximación teórica de la superficie de volatilidad en el mercado cambiario, de renta variable y de renta fija colombianos.

Los resultados encontrados a través del modelo propuesto son intuitivos y se ajustan a lo señalado por la evidencia de mercados de opciones desarrollados, lo cual permite comprender de mejor manera el comportamiento de la volatilidad en el mercado local. Adicionalmente, la capacidad del modelo de difusión con saltos para capturar el comportamiento empírico de los

² Robert Merton y Myron Scholes recibieron el premio Nobel de Economía en 1997 por su desarrollo en el campo de valoración de opciones, mientras que a Fisher Black se le reconoce su contribución sin habersele otorgado dicho premio. William Sharpe y Harry Markowitz recibieron el premio Nobel de Economía en 1990 por el desarrollo del CAPM y la teoría de portafolio, respectivamente.

precios de los activos puede ser de utilidad para otros propósitos, tales como la evaluación de riesgo de mercado.

Sin embargo, por la ausencia de un mercado de opciones local desarrollado, es necesario señalar que existe una dificultad manifiesta para calibrar el modelo, así como para utilizar la superficie obtenida como la volatilidad –implícita- esperada por el mercado³. No obstante, dado el bajo nivel de desarrollo del mercado local de opciones, el contar con una aproximación teórica a la superficie de volatilidad puede ayudar a que los participantes del mercado tengan un punto de partida para realizar sus cotizaciones, así como para ampliar la gama de productos ofrecidos en ese mercado.

El presente documento consta de seis secciones, de las cuales la primera es esta introducción. La segunda sección presenta el modelo de B&S y la evolución histórica de su principal supuesto: el movimiento browniano. La tercera expone el concepto de volatilidad implícita y superficie de volatilidad, así como algunos hechos estilizados sobre esta última. La cuarta se ocupa de describir y comparar brevemente las clasificaciones metodológicas más utilizadas para modelar la superficie de volatilidad. La quinta presenta la utilización de la metodología de difusión con saltos (*jump-diffusion*) para modelar la superficie de volatilidad del mercado cambiario, accionario y de renta fija locales. Por último, se concluye sobre los alcances y limitaciones de los resultados.

2. El modelo de Black & Scholes (B&S) y el movimiento browniano

En la primavera de 1973, Myron Scholes y Fisher Black publicaron el modelo que a la fecha se mantiene como el modelo estándar teórico de valoración de opciones financieras. La fórmula de B&S, desarrollada originalmente para valorar opciones de compra (*call*) europeas sobre acciones, es la siguiente⁴:

$$C_{BS} = S_t N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad \langle 1 \rangle$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \langle 2 \rangle$$
$$d_2 = \frac{\ln(S_t / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

³ Algunos autores consideran que la volatilidad implícita es útil como señal de alerta de movimientos futuros (Malz, 2000). Otros autores dudan de la capacidad predictiva de los participantes del mercado, ya que son ellos quienes, a través de sus transacciones, generan la volatilidad implícita (Wilmott, 2007).

⁴ El modelo original de B&S fue diseñado para valorar acciones sin dividendos. Posteriormente se aplicó a otros activos, en algunos casos requiriendo modificaciones menores a las fórmulas. Por lo anterior, en adelante se utilizará el término acciones o activos indistintamente.

C_{BS} = precio o prima de la opción *call*
 S_t = precio del activo subyacente (*spot*)
 K = precio de ejercicio (*strike*)
 r = tasa de interés libre de riesgo
 T = plazo al vencimiento
 σ = volatilidad anual del activo subyacente
 $N(\cdot)$ = función de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar

Pese a que es común encontrar que el trabajo de Black y Scholes (1973) es el pionero en la valoración de opciones, varias décadas antes de la aparición del modelo B&S ya existían otros para el mismo fin. De acuerdo con Taleb (2007) y Haug y Taleb (2009), el modelo B&S simplemente constituye una derivación alternativa de modelos ya existentes en ese entonces, los cuales, pese a ser más robustos y realistas, eran calificados como poco rigurosos en cuanto a su desarrollo teórico. La labor de Black y Scholes consistió en encontrar una manera de hacer compatible el modelo existente con las teorías de equilibrio general de tipo *gaussiano*, haciéndolo más atractivo para el pensamiento económico de ese entonces, aunque con un costo: un alto nivel de simplificación de la realidad⁵.

De acuerdo con Black y Scholes (1973), el modelo que lleva su nombre asume un conjunto de “condiciones ideales” para el mercado del activo subyacente y de la opción:

- i. El precio del activo sigue una caminata aleatoria (*random walk*) en tiempo continuo [...]. Por lo tanto, la distribución de los posibles precios del activo al final de cualquier intervalo de tiempo es log-normal. La varianza del activo es constante;
- ii. La tasa de interés de corto plazo es conocida y constante a través del tiempo;
- iii. El activo no paga dividendos, ni realiza otro tipo de distribución de flujos;
- iv. La opción es “europea”, es decir, solo puede ser ejercida al vencimiento;
- v. No existen costos de transacción al comprar o vender el activo subyacente;
- vi. Es posible pedir prestada cualquier fracción del valor de un activo a la tasa de corto plazo,
- vii. Es posible irse en corto (*short selling*).

Algunos de estos supuestos han sido relajados para hacer el modelo aplicable a otros activos o para reconocer la realidad de los mercados, mientras que otros claramente fundamentan el modelo aunque contradicen la realidad de manera más evidente e importante. El más trascendental de estos supuestos es el primero, el cual, en conjunto, asume que la dinámica de los precios sigue un movimiento browniano o de caminata aleatoria (*random walk*).

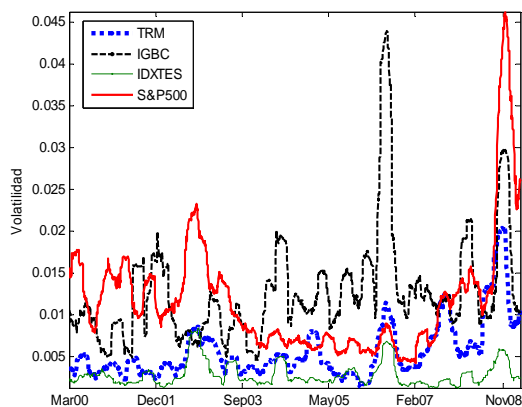
El asumir el movimiento browniano de los cambios de precios incluye, entre otros, los siguientes supuestos:

⁵ Haug y Taleb (2009) señalan que el modelo de B&S constituye un modelo teórico elegante, pero que no es utilizado por los agentes del mercado de derivados por su –potencialmente costosa– simplificación de la realidad. Prueba de ello es el fracaso de los premios Nobel de Economía de 1997 Robert Merton y Myron Scholes, directivos del fondo Long Term Capital Management. Dicho fondo, como consecuencia de los eventos extremos de 1998, tuvo que ser rescatado por varios bancos por \$3,6 miles de millones de dólares (Mandelbrot y Hudson, 2004; Taleb, 2007; Wilmott, 2007b).

- i. Los cambios en el precio de los activos son estacionarios, por lo que las características del proceso (v.g. tendencia y volatilidad) no cambian con el tiempo;
- ii. Los cambios en el precio de los activos son independientes, por lo que no existe correlación con cambios anteriores;
- iii. Los cambios en el precio de los activos son continuos, sin saltos;
- iv. Los cambios en el precio de los activos tienen una distribución normal $[N\sim(0,t)]$, por lo que la gran mayoría de éstos es pequeño o marginal, mientras que los cambios extremos suceden con muy baja frecuencia.

Respecto al primer supuesto, es evidente que la volatilidad de los activos y, por ende, las características de sus procesos, no son constantes a través del tiempo. Lo anterior puede comprobarse al revisar la evolución de la volatilidad de la Tasa Representativa del Mercado (TRM), el Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC), el índice representativo del mercado de deuda pública interna-IDXTES y el índice S&P500⁶.

Gráfico 1
Dinámica de la volatilidad de los últimos 60 días hábiles
(TRM, IGBC, IDXTES y S&P500)



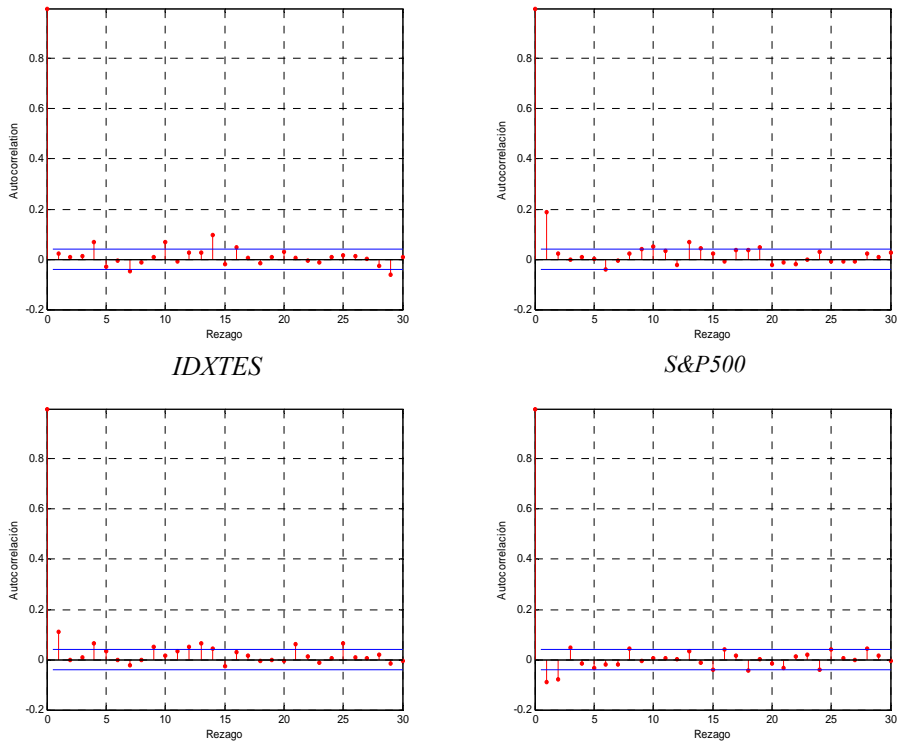
Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

Sobre la segunda, es bien conocido que grandes cambios en el precio de los activos financieros tienden a ser seguidos por otros de similar tamaño, ya sean positivos o negativos, mientras que cambios pequeños tienden a ser seguidos por otros de igual tamaño, en lo que se conoce como agrupamiento de volatilidad o *volatility clustering* (Mandelbrot y Hudson, 2004).

⁶ La TRM corresponde al promedio aritmético simple de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y de venta de divisas, calculada y certificada por la Superintendencia Financiera de Colombia. El IGBC es un indicador bursátil del mercado accionario de la Bolsa de Valores de Colombia. El IDXTES es un índice de retorno total desarrollado por Reveiz y León (2008b) para el análisis del mercado colombiano de deuda pública. El S&P500 es un indicador bursátil que representa aproximadamente el 75% del mercado accionario de los Estados Unidos. Para los cálculos incluidos en este documento se utilizó una serie diaria desde el 28 de marzo de 2000 hasta el 31 de marzo de 2009, a menos que se indique lo contrario.

Un método estándar para corroborar este hecho es a través del análisis de la correlación de los cambios en los precios con sus rezagos. El Gráfico 2 presenta el autocorrelograma para las cuatro series de tiempo en cuestión, el cual muestra que existe cierto grado de correlación con los rezagos⁷.

Gráfico 2
Gráficos de autocorrelación
(Retornos diarios de TRM, IGBC, IDXTES y S&P500)

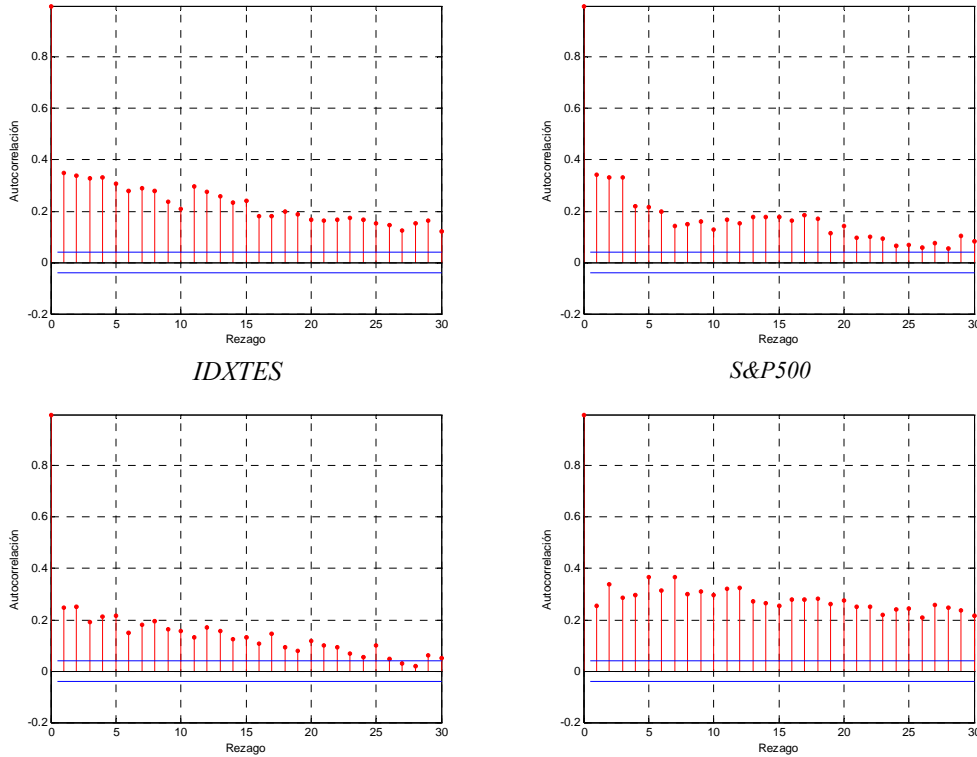


Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

Alternativamente, según Mikosch (2004), el autocorrelograma puede ser construido a partir del valor absoluto de los cambios en los precios de los activos con sus rezagos. Utilizar los cambios absolutos permite evaluar el grado de dependencia respecto de la magnitud de los cambios, sin importar el signo de estos. Como se aprecia en el Gráfico 3, existe una autocorrelación significativa respecto de la magnitud de los cambios.

⁷ El resultado gráfico se corroboró a través de la prueba de Ljung-Box, la cual se aplicó con treinta rezagos y un nivel de significancia del 5%. Para todas las series se rechazó la hipótesis nula de independencia de los rezagos de la variable.

Gráfico 3
Gráficos de autocorrelación
(Retornos diarios absolutos de TRM, IGBC, IDXTES y S&P500)
TRM *IGBC*



Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

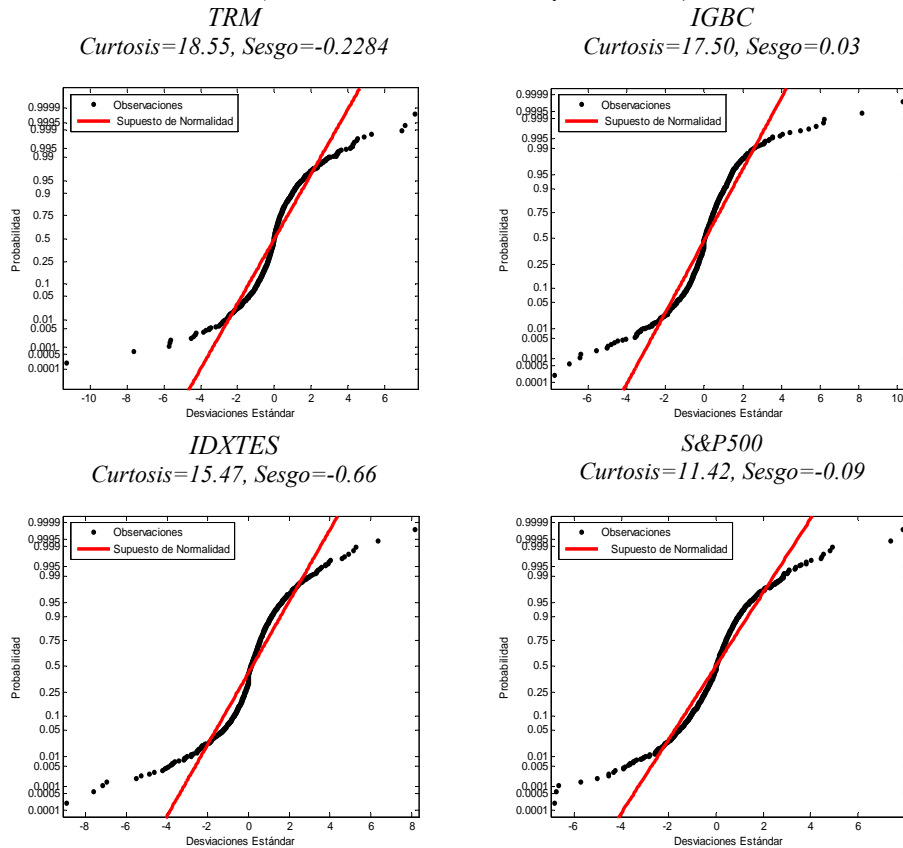
Lo encontrado en el gráfico anterior corrobora la evidencia empírica según la cual en un periodo de alta (baja) volatilidad, un cambio de alta (baja) magnitud en los precios de los activos financieros suele ser seguido por otro de magnitud similar, por lo que los cambios en los precios de los activos no son independientes⁸.

Respecto de los supuestos tercero y cuarto, correspondientes a cambios continuos –sin saltos- y la distribución normal de los cambios de las variables, respectivamente, la evidencia también corrobora su invalidez. A continuación, a través de gráficos de probabilidades, se compara la distribución empírica de los retornos estandarizados de la TRM, el IGBC, el IDXTES y el S&P500 con la distribución normal⁹; en la medida en que la distribución empírica (observaciones) se aleje de la línea recta (distribución normal), el supuesto de normalidad es menos adecuado.

⁸ El resultado gráfico se corroboró a través de la prueba de Ljung-Box, la cual se aplicó con treinta rezagos y un nivel de significancia del 5%. Para todas las series se rechazó la hipótesis nula de independencia de los rezagos de la variable.

⁹ La utilización de índices como el IGBC, el IDXTES y el S&P500 para comprobar la ausencia de normalidad es posible gracias a que si los retornos de los activos individuales se comportan de acuerdo con el supuesto de normalidad, la agregación –lineal- de éstos a través del índice también debe serlo.

Gráfico 4
Gráficos de probabilidades
(TRM, IGBC, IDXTES y S&P500)



Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

En todos los casos la inspección gráfica muestra que la distribución empírica difiere de la distribución normal¹⁰. Esta discrepancia es más marcada para aquellas observaciones cuya magnitud excede de dos desviaciones estándar aproximadamente; es decir, para aquellas observaciones que pueden ser consideradas como eventos extremos. Este hecho se verifica con la curtosis, la cual excede el supuesto de normalidad (curtosis = 3) entre tres y seis veces para las series seleccionadas, lo cual obedece a que los eventos extremos son más frecuentes de lo que el supuesto de normalidad indica, en lo que también se conoce como efecto de “colas anchas” o *fat tails*.

Adicionalmente, Malevergne y Sornette (2006) señalan que el exceso de curtosis no sólo es evidencia de la presencia de “colas anchas” y desviaciones significativas en la realidad: también resulta de la dependencia serial entre los retornos del activo (autocorrelación).

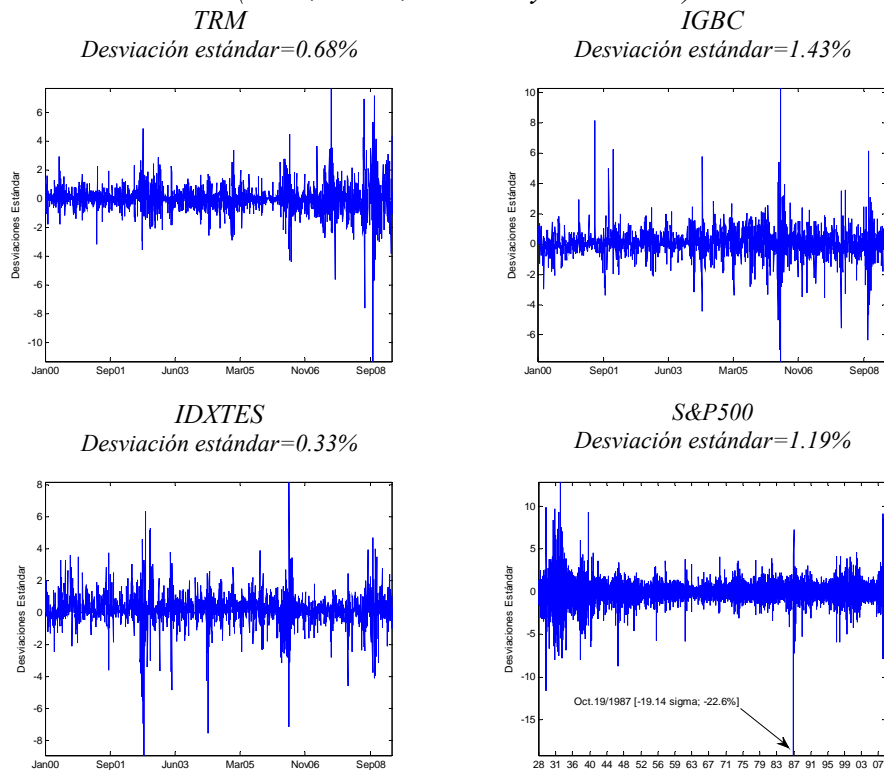
¹⁰ El resultado gráfico se corroboró a través de la prueba de normalidad de Jarque-Bera, así como a través de las pruebas de bondad de ajuste de Lilliefors y Kolmogorov-Smirnov. Siempre se consiguió rechazar la hipótesis nula de normalidad de los retornos de las series. Los resultados coinciden con los de Malevergne y Sornette (2006), quienes comprobaron la existencia de exceso de curtosis y sesgo para muestras de alta frecuencia (cada cinco y sesenta minutos) para el Nasdaq en el periodo abril de 1997 a mayo 1998, y de media (diaria) y baja frecuencia (mensual) para el Dow Jones en el periodo mayo de 1896 a mayo de 2000.

Así mismo, aunque menos evidente en la inspección gráfica, el sesgo de la distribución empírica también invalida el supuesto de normalidad. Bajo el supuesto de normalidad el sesgo no debe diferir significativamente de cero, lo cual indicaría que la distribución es simétrica y que, existe igual probabilidad de encontrar observaciones a ambos lados de la distribución. De no ser simétrica, como es el caso de las series seleccionadas, las observaciones se concentran hacia un lado de la misma; el sesgo de signo negativo (positivo) indica que la cola izquierda (derecha) de la distribución es mayor (menor) que la derecha (izquierda), por lo que existen más observaciones a la izquierda (derecha) de la misma.

Por otra parte, la existencia de eventos extremos cuya magnitud difieren ampliamente de los supuestos de normalidad, señala la presencia de un proceso que no se caracteriza por ser continuo.

Gráfico 5

*Retornos diarios estandarizados
(TRM, IGBC, IDXTES y S&P500¹¹)*



Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

El supuesto de normalidad implica que la magnitud estandarizada del movimiento del precio de cada activo determina su probabilidad esperada de ocurrencia. Según esto, es posible establecer que un evento como el ocurrido en el mercado accionario de Estados Unidos en octubre 19 de 1987 (ver Gráfico 5), el cual representó una caída de -22.6% (-19.14 desviaciones estándar), es

¹¹ Debido a la disponibilidad de información histórica, así como por su utilidad en el análisis, en este caso la serie del S&P500 abarca desde enero de 1928 hasta mayo de 2009.

prácticamente imposible según el supuesto de normalidad; de acuerdo con Mandelbrot y Hudson (2004), su probabilidad es del orden de una en 10^{50} observaciones.

Movimientos de menor magnitud, pero que igualmente son evidencia de la existencia de saltos en el comportamiento de los activos en cuestión, pueden observarse en el gráfico anterior. Su probabilidad de ocurrencia esperada según el supuesto de normalidad se aprecia en el Cuadro 1:

Cuadro 1
Frecuencia esperada y realizada de eventos extremos estandarizados
(TRM, IGBC, IDXTES y S&P500)

X	Supuesto de Normalidad		Evidencia Empírica							
			Número de Observaciones				Frecuencia			
	Probabilidad	Uno en K tiempo	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500 (*)	TRM	IGBC	IDXTES	S&P500 (*)
>1 sigma	0,317	3 días	436	452	453	1875	18,2%	18,8%	18,9%	9,2%
>2	0,045	1 mes	124	105	130	446	5,2%	4,4%	5,4%	2,2%
>3	0,0027	1,5 años	41	43	49	165	1,7%	1,8%	2,0%	0,8%
>4	6,30E-05	63 años	22	21	19	69	9,17E-03	8,75E-03	7,92E-03	3,38E-03
>5	5,70E-10	7 milenios	9	12	10	42	3,75E-03	5,00E-03	4,17E-03	2,06E-03
>6	2,00E-09	2 millones de años	5	8	6	23	2,08E-03	3,33E-03	2,50E-03	1,13E-03
>7	2,60E-12	1562 millones de años	4	3	4	15	1,67E-03	1,25E-03	1,67E-03	7,34E-04
>8	1,20E-15	3 billones de años	1	2	2	8	4,17E-04	8,34E-04	8,34E-04	3,92E-04
>9	2,30E-19	17.721 billones de años	1	1	0	6	4,17E-04	4,17E-04	0,00E+00	2,94E-04
>10	1,50E-23	260 millones de billones de años	1	1	0	1	4,17E-04	4,17E-04	0,00E+00	4,89E-05

Se presenta cuán probable es encontrar movimientos de más de X desviaciones estándar de acuerdo con el supuesto de normalidad, medida como probabilidad y como el tiempo de espera (días o años de transacciones) necesario para encontrar un movimiento de tal magnitud. Se presenta adicionalmente la evidencia empírica de tales movimientos para las series objeto de análisis, medido en número de observaciones y su frecuencia relativa observada.

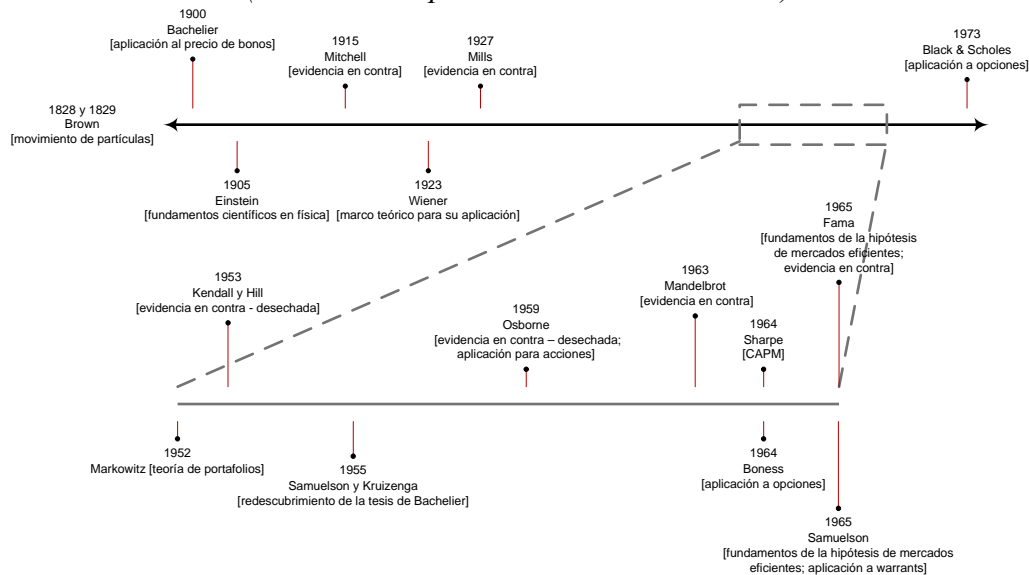
(*) La serie del S&P500 abarca desde enero de 1928 hasta mayo de 2009.

Fuente: elaboración propia con datos de Sornette (2003), Revez y León (2008b) y Bloomberg.

Entonces, la evidencia muestra que los precios de los activos financieros ciertamente saltan. La discontinuidad que resulta de estos saltos, lejos de ser una anomalía que es mejor ignorar, es un elemento esencial de los mercados, que diferencia las Finanzas de las ciencias naturales (Mandelbrot y Hudson, 2004).

Si bien es evidente que los cuatro pilares del movimiento browniano no se cumplen en la realidad y, por tanto, este no es adecuado para describir la dinámica de los precios de los activos financieros, es necesario conocer el origen de este supuesto y el porqué de su utilización. En la Figura 1 se presenta un resumen de la evolución del movimiento browniano aplicado a Finanzas y Economía, y a continuación se describe con más detalle su desarrollo.

Figura 1
Desarrollo del movimiento browniano aplicado a finanzas
(Línea de tiempo desde Brown hasta B&S)



Fuente: elaboración propia.

El movimiento browniano proviene de la biología y la física. Su nombre se debe a las investigaciones del botánico escocés Robert Brown a principios del siglo XIX sobre el movimiento de las partículas orgánicas e inorgánicas suspendidas en un fluido, el cual él caracterizó como inexplicable, irregular e independiente (Brown, 1828 y 1829). Posteriormente, Einstein (1905) propuso una fundamentación científica para el movimiento browniano, mientras que Wiener (1923) desarrolló un riguroso marco teórico para su aplicación.

Pero fue a finales del siglo XIX cuando el francés Louis Bachelier fundamentó la utilización del movimiento browniano para caracterizar la dinámica de los precios de los activos financieros. Bachelier (1900) basó su teoría en lo que él encontró como particularidades en la dinámica de los precios de los bonos del mercado francés:

- La dinámica es un “juego justo” o *fair game*, sin memoria, en el que la probabilidad de aumento o caída en el precio es siempre $\frac{1}{2}$ ¹²;
- La probabilidad está regida por la ley de Gauss;
- Si el tiempo se divide en fracciones o intervalos pequeños, durante este intervalo el precio variará muy poco;
- La probabilidad es estable en el tiempo;
- El rango en el que se encontrará el precio del activo en un momento del tiempo es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo;
- La dinámica del precio de los activos se asimila a las leyes de difusión de la probabilidad de algunas teorías de la física, particularmente la de difusión de calor.

¹² El mejor ejemplo de *fair game* es lanzar una moneda. Siempre que ésta esté bien balanceada, la probabilidad de cara o sello es la misma (50%), y la probabilidad de cualquier lanzamiento es independiente de todos los demás lanzamientos hechos y por hacer.

De manera general Mandelbrot (1963) describe la teoría de Bachelier de la siguiente manera: si $Z(t)$ es el precio de una acción o *commodity* en un momento t , se supone que las diferencias sucesivas de la forma $Z(t+T) - Z(t)$ son variables aleatorias independientes, distribuidas según la normal o de Gauss, con media cero y varianza proporcional al intervalo T .

Por décadas el movimiento browniano aplicado al precio de los activos financieros simplemente no trascendió. A mediados de los cincuentas Paul Samuelson redescubrió la tesis de Bachelier¹³ al desarrollar un modelo de valoración de *warrants*¹⁴. Otros desarrollos basados en el movimiento browniano aplicado al precio de activos financieros fueron llevados a cabo por Osborne (1959) y Boness (1964). Posteriormente, basados en los desarrollos de Boness (1964) y Samuelson (1965b), Black y Scholes (1973) desarrollaron el modelo que lleva su nombre.

Pero los fundamentos de Bachelier no solo sirvieron para desarrollar la teoría de valoración de opciones. De acuerdo con Malevergne y Sornette (2006), fue gracias al trabajo innovador de Bachelier y a las mejoras introducidas a este por Osborne (1959) y Samuelson (1965b) que el paradigma de normalidad de los retornos logarítmicos de los precios de los activos ha sido el punto de partida de muchas teorías, tales como la teoría de portafolio (*Modern Portfolio Theory*) de Markowitz (1952), el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) de Sharpe (1964) y el modelo de Black y Scholes (1973).

Igualmente, la tesis de Bachelier sirvió de fundamento para el desarrollo de la hipótesis de mercados eficientes (*Efficient Market Hypothesis*). Samuelson (1965) y Fama (1965) encontraron que, similar a los hallazgos de Bachelier (1900) y Osborne (1959), los cambios en los precios de los activos son aproximadamente *gaussianos* o normales y que, gracias la acción del mercado, son independientes, por lo que siguen un paseo aleatorio similar al movimiento browniano¹⁵. Con base en lo anterior, Samuelson y Fama observaron que ningún inversionista puede consistentemente superar al mercado o a una selección aleatoria de activos de similar volatilidad, por lo que pareciera que los cambios de precios de los activos no se alejan de una generación de números aleatorios; lo anterior resulta en que los precios siempre deben reflejar toda la información disponible y en la imposibilidad de generar retornos a partir del manejo de la información.

Paradójicamente, las críticas al movimiento browniano y su aplicación a la dinámica del precio de los activos no son del todo recientes¹⁶. Antes que Markowitz (1952), Sharpe (1964),

¹³ Samuelson, premio nobel de Economía en 1970, redescubrió a mediados de los cincuentas la tesis de Bachelier junto con su estudiante de doctorado R. Krueger; según el propio Samuelson, gracias al profesor L.J. Savage de la Universidad de Yale. Además de redescubrir la tesis de Bachelier, Samuelson reconoció dos importantes defectos en la teoría de Bachelier: el valor de opciones de largo plazo puede llegar a exceder el precio del subyacente y el precio de los activos puede llegar a ser negativo. Para corregirlo, Samuelson reemplazó el movimiento browniano aritmético o absoluto de Bachelier por el movimiento browniano geométrico, el cual es el estándar actualmente (Samuelson, 1965; Samuelson, 1973; Samuelson y Crowley, 1986; Mandelbrot y Hudson, 2004).

¹⁴ Un *warrant* es un tipo de instrumento financiero anexo a un título valor. Un *warrant* le permite al inversionista comprar acciones ordinarias a un precio determinado durante un periodo de tiempo o a perpetuidad (Reuters, 2003). Dado que le dan al inversionista el derecho de compra, son análogas a las opciones financieras.

¹⁵ No obstante, Fama (1965) reconoce la existencia de leptocurtosis o “colas anchas”, así como las ventajas de utilizar otras distribuciones, tal como lo proponía ya en ese entonces Mandelbrot (1963).

¹⁶ Literatura reciente sobre críticas a la utilización del movimiento browniano en Finanzas y Economía se encuentra en Sornette (2003), Mandelbrot y Hudson (2004), Rebonato (2007) y Taleb (2007).

Samuelson (1965) y Fama (1965) sentaron las bases para el desarrollo de la teoría financiera moderna, varios autores documentaron fallas en los ya mencionados supuestos. Según la literatura, los primeros trabajos que documentaron el alejamiento del movimiento de los precios de los activos de la distribución normal fueron Mitchell (1915) y Mills (1927). Mills, basado en las diferencias logarítmicas de los precios de *commodities* en el periodo 1913-1926, encuentra que las distribuciones del retorno de los activos difieren estadísticamente de la *gaussiana* por la presencia de sesgo y exceso de curtosis¹⁷.

Posteriormente, Kendall y Hill (1953), con datos de la bolsa de Londres para el periodo 1883-1934, encontraron que la distribución de los retornos logarítmicos de los precios mostraba que los eventos extremos eran más frecuentes y de mayor magnitud de lo que la distribución normal supondría, pero, desechando sus hallazgos, justificaron la utilización de dicha distribución¹⁸.

A diferencia de Kendall y Hill (1953) y Osborne (1959), Mandelbrot (1963) propuso la utilización de otro tipo de distribución (Pareto) ante la evidencia de alejamiento de la distribución normal o *gaussiana*. Fama (1965) reconoce los hallazgos de Mandelbrot (1963) y señala su relevancia, pero persiste en la utilización del supuesto de movimiento browniano como base de la hipótesis de mercados eficientes.

Respecto a la conformación de portafolios de inversión, Roy (1952), a diferencia de Markowitz, desarrolla una teoría de diversificación basada en la minimización del impacto de eventos extremos, sin recaer en el supuesto de normalidad de los retornos de los activos. Roy, luego de considerar el impacto de los eventos extremos, y de reconocer el limitado conocimiento de las probabilidades de todos los posibles estados de la naturaleza por parte de los inversionistas, desarrolla una teoría que resta importancia al resultado promedio o esperado de su inversión, así como a la varianza del mismo¹⁹.

Mandelbrot y Hudson (2004) señalan que, pese a encontrar evidencia que invalidaba la utilización del movimiento browniano para explicar la dinámica del precio de los activos financieros, varios autores simplemente consideraron sus hallazgos como errores y, por tanto, los ignoraron. A su vez, también señalan que haber reconocido dicha evidencia hubiese significado la imposibilidad de suponer un proceso estocástico continuo, sin saltos, lo cual hubiera invalidado los pilares teóricos de las Finanzas modernas.

De acuerdo con la literatura (Fama, 1965; Belkacem *et al.*, 1996; Mandelbrot y Hudson, 2004), los hallazgos de ausencia de normalidad antes documentados traen series consecuencias para

¹⁷ Mills (1927) encontró evidencia de la no estacionaridad de las series de precios y de la excepcionalidad de distribuciones de tipo normal, especialmente por la presencia de exceso de curtosis.

¹⁸ Kendall y Hill (1953) encontraron evidencia de (i) aumento en la varianza a través del tiempo (no estacionaridad) –por lo que dividen la serie en dos periodos para hacerla más estable-; (ii) de presencia de saltos en las series –los cuales fueron descartados-; (iii) de leptocurtosis –inclusive luego de descartar algunos de los saltos-; de autocorrelación en los primeros rezagos –la cual se justificó con el uso de series semanales. Luego de “corregir” las series de tiempo, la conclusión de Kendall es que estas muestran un comportamiento verdaderamente aleatorio y que sigue un tipo de movimiento browniano. Osborne (1959), al igual que Kendall y Hill (1953), también desechó las discrepancias con la normalidad.

¹⁹ Una breve descripción del modelo de Roy (1952), así como su aplicación a la optimización de portafolios puede encontrarse en Reveiz y León (2008) y León y Laserna (2008).

varias teorías. La teoría de portafolios de Markowitz, basada completamente en el supuesto de normalidad e independencia de los cambios de precios, enfrenta casos en los que la varianza puede no estar definida –es infinita–; la optimización por mínimos-cuadrados puede ser inadecuada, y la cantidad de activos requeridos para conseguir determinado nivel de diversificación puede ser varias veces la supuesta por la teoría tradicional. En cuanto al CAPM, existe evidencia que los modelos tradicionales subestiman el Beta cerca de 6% en promedio. Por lo anterior, para ambas teorías, el utilizar el movimiento browniano puede significar que se está aumentando el riesgo en vez de disminuirlo.

En cuanto al modelo de Black & Scholes, la invalidez del movimiento browniano implica que el modelo es a su vez inválido²⁰ y que, por tanto, el precio obtenido es errado. Esta es la base de la existencia del *volatility smile* y la superficie de volatilidad.

3. La superficie de volatilidad

Por lo general, las opciones se conciben como instrumentos diseñados para que el comprador de estas se beneficie de los movimientos direccionales del mercado y no sufra de pérdidas como consecuencia de movimientos del mercado en la dirección opuesta (de Lara, 2002).

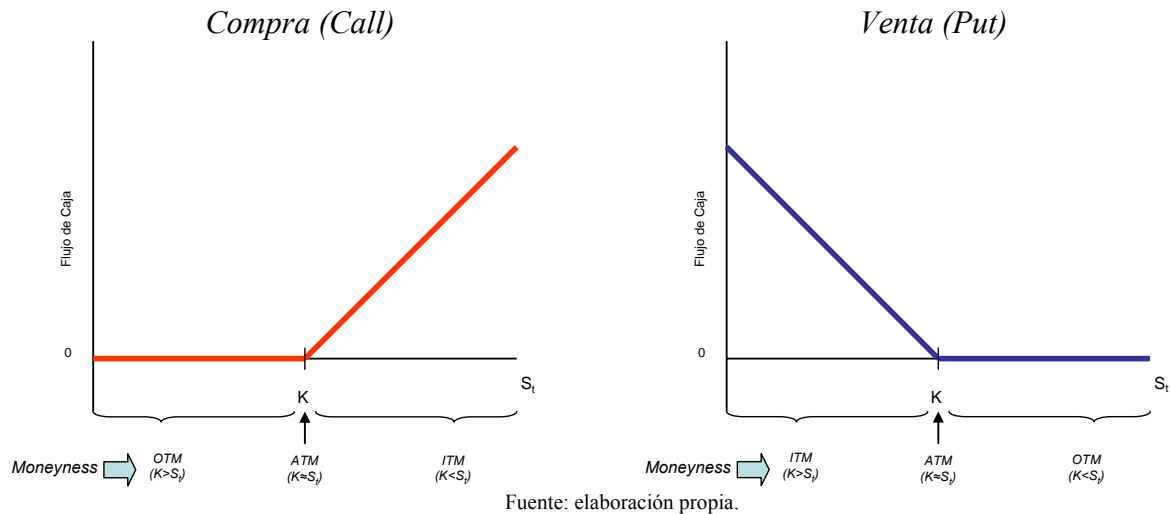
Los flujos de caja que espera recibir el comprador de una opción dependen de la relación existente entre el precio de ejercicio [K] y el precio del subyacente [S_t], comúnmente llamada *moneyness*. En el caso del comprador de una opción de compra (*call*), el flujo será positivo siempre que la opción esté *in the money* (*ITM*) al vencimiento, es decir, que el precio de ejercicio sea inferior al precio del subyacente [$(K < S_t)$], mientras que no tendrá pérdidas en caso que la opción se encuentre *out of the money* (*OTM*) [$(K > S_t)$]; en el caso de una opción de venta (*put*), el comprador de la opción tendrá un flujo positivo siempre que la opción esté *in the money* (*ITM*) al vencimiento, es decir, el precio de ejercicio sea superior al precio del subyacente [$(K > S_t)$], mientras que no tendrá pérdidas en caso que la opción se encuentre *out of the money* (*OTM*) [$(K < S_t)$] al vencimiento. Si el precio del subyacente es igual al del precio de ejercicio [$(K \approx S_t)$] al vencimiento, el comprador de la opción se encuentra *at the money* (*ATM*) y será indiferente entre ejercerla o no²¹.

El Gráfico 6 muestra el componente direccional de las opciones, con el cual el comprador de una *call* se beneficia o protege de aumentos en el precio del subyacente, mientras que el comprador de una *put* se beneficia o protege de caídas en el precio del subyacente; en ese sentido, por asemejarse a un seguro contra los aumentos (*call*) o caídas (*put*) en el precio del activo, es que las opciones se entienden como un instrumento direccional.

²⁰ Merton (1976) señala que varios supuestos del modelo de B&S pueden ser descartados sin invalidarlo, salvo aquel que supone que el proceso estocástico es continuo, sin saltos, en el que en un corto intervalo de tiempo el precio del activo solo puede cambiar marginalmente.

²¹ Dado que en el gráfico se analiza los flujos de caja resultantes para el comprador de la opción, y no las pérdidas y ganancias para este, no se incluye en el análisis el valor de la prima pagada al momento de realizar la compra. Si se incluye el valor de la prima (C), la posición *ITM* de una opción *Call* se presentará cuando [$(K < S_t - C)$].

Gráfico 6
 Perfil de flujos de caja de una opción de compra (call) y venta (put)



Sin embargo, tal como lo señalan Malz (1998), Rebonato (1999) y Neftci (2004), desde el punto de vista del agente del mercado de derivados las opciones son instrumentos con los que es posible transar o negociar volatilidad. Los participantes del mercado de derivados se concentran en la volatilidad del subyacente, no en la dirección del precio del mismo. De hecho, al interior del mercado de opciones no se cotizan precios para las opciones, sino volatilidades o *vols*; esto también se explica porque todos los parámetros para valorar una opción son observables en el mercado, excepto la volatilidad.

Pese a contradecir el primer supuesto del modelo de B&S -la volatilidad es constante-, el mercado cotiza diferentes volatilidades para un solo activo subyacente, las cuales corresponden a diferentes precios de ejercicio o niveles de *moneyness*, y diferentes plazos al vencimiento. Pero esta práctica no solo contradice el supuesto de B&S, sino que parece poco intuitiva: para un mismo activo subyacente se cotizan diferentes volatilidades.

En realidad, a pesar de violar los supuestos de B&S, la práctica de asignar diferentes volatilidades a un mismo activo subyacente no es otra cosa que la manera que tienen los participantes del mercado para obviar el supuesto de movimiento browniano. De este modo, sobrevalorando la volatilidad correspondiente a movimientos extremos del precio del subyacente, los participantes del mercado pueden capturar la existencia de exceso de curtosis y sesgo.

Y es esa capacidad de ser adaptado por los participantes del mercado lo que hace al modelo B&S tan valioso, no precisamente su fundamentación teórica. De acuerdo con Haug y Taleb (2009), el éxito del modelo de B&S se debe a un simple atributo de la distribución *gaussiana*: es posible expresar cualquier distribución, aun si tiene “colas anchas”, variando el parámetro de desviación estándar $[\sigma]$ para cada nivel de la densidad de la variable aleatoria. Por ese motivo, pese a existir nuevos y más adecuados modelos que han superado el supuesto de movimiento browniano, el

mercado, por parsimonia, prefiere acomodar el modelo de B&S en vez de utilizar modelos más complejos²².

Por lo anterior, pese a contradecir los supuestos del modelo B&S, pero con el fin de conservar su simplicidad y parsimonia, en vez de tener una única volatilidad $[\sigma]$ para todos los niveles de precio de ejercicio, el mercado acomoda la volatilidad como una función del precio de ejercicio $[\sigma(K)]$ y el plazo al vencimiento $[\sigma(T)]$, lo que resulta en una “sonrisa de volatilidad” o *volatility smile*, y en una estructura de plazos de volatilidad, respectivamente. Si se acomoda la volatilidad como función del precio de ejercicio y el plazo al vencimiento se obtiene la superficie de volatilidad $[\sigma(K, T)]$.

Infortunadamente la superficie de volatilidad $[\sigma(K, T)]$ solo es observable directamente en algunos mercados de alto nivel de desarrollo, por lo que por lo general debe ser calculada – indirectamente- a partir de aquellas variables que sí lo son: precio o prima de la opción, precio *spot* del subyacente $[S_t]$, precio de ejercicio $[K]$, tasa de interés y plazo al vencimiento. Para esto se utiliza el modelo de B&S de manera inversa²³, consiguiendo lo que se conoce como la volatilidad implícita; por lo tanto, la volatilidad implícita puede ser definida como aquella que, introducida en el modelo de B&S, hace que el precio teórico y observado en el mercado coincidan para un nivel determinado de precio de ejercicio y plazo al vencimiento.

En el mercado de derivados, con el fin de estandarizar la cotización de diferentes volatilidades para diferentes niveles de precio de ejercicio, se utilizan medidas de *moneyness* que relacionan el precio de ejercicio $[K]$ y el precio del subyacente $[S_t]$. Las medidas de *moneyness* más usuales son el cociente $[(K/S)]$, el retorno logarítmico de dicho cociente $[\ln(K/S)]$, el retorno logarítmico de dicho cociente estandarizado $[\ln(K/S)/\sigma\sqrt{t}]$, y el delta de la opción.

De acuerdo con Malz (1998) y Derman (2008), los participantes del mercado prefieren el delta de la opción, el cual corresponde al cambio en el precio de la opción ante cambios en el valor del precio del subyacente según el modelo de B&S. Utilizando las mismas convenciones de variables que en (1) y (2), su cálculo es el siguiente:

$$delta_{Call} = N\left(\frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad \langle 3 \rangle$$

donde

$$\begin{aligned} 0 &\leq delta_{Call} \leq 1 \\ delta_{Call}^{ATM} &\approx 0.5 \\ delta_{Put} &= delta_{Call} - 1 \end{aligned}$$

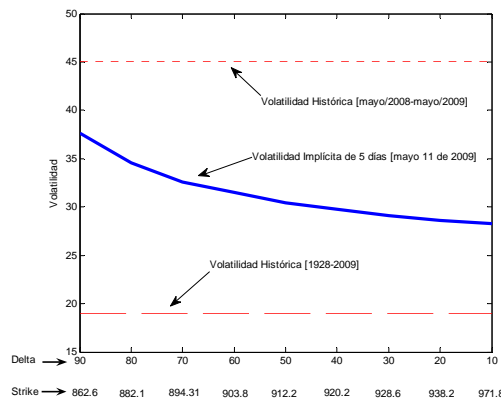
²² Taleb (1997) señala que nuevos modelos de valoración de opciones que corrigieron los problemas de B&S no tuvieron éxito entre los participantes del mercado. Por ejemplo, modelos basados en volatilidad estocástica o que combinan el movimiento browniano con la presencia de saltos (*jump-diffusion*), no han tenido éxito dado que requieren de la estimación de parámetros adicionales. Estos modelos serán descritos más adelante.

²³ Dado que el valor de una opción (*call*) como función de la volatilidad corresponde a un mapeo monótonico entre el espacio de la volatilidad $[0, +\infty[$ y el espacio del precio de la opción $]0, (S - Ke^{-rt})]$, el cálculo de una única volatilidad implícita es posible (Cont y da Fonseca, 2002).

La utilización del delta tiene varias ventajas (León y Oker, 2005). El delta de una *call* está acotado entre 0 y 1 o 0 y 100, lo cual implica que trabajar con delta evita la ampliación del grado de *moneyness* conforme el plazo al vencimiento aumenta; es una medida simétrica alrededor del nivel *ATM*; para cada nivel de delta existe un único precio de ejercicio y viceversa²⁴; permite comparar fácilmente la volatilidad entre opciones con diferente subyacente, y permite reconocer que a determinados niveles de delta existe una mayor liquidez en el mercado de volatilidad (v.g. 75 y 25 delta). Adicionalmente, según Derman (2008), es ventajoso utilizar el delta ya que se aproxima a la probabilidad que la opción expire *ITM*²⁵.

Utilizando el delta como métrica de *moneyness* [$\sigma(\text{delta})$], el Gráfico 7 presenta la volatilidad implícita para el índice S&P500 el día 11 de mayo de 2009, a un plazo de cinco días al vencimiento de la opción. Dado que el modelo B&S supone que la volatilidad es independiente del nivel de *moneyness*, lo cual resultaría en una volatilidad implícita horizontal, se presenta, a manera de comparación, la volatilidad (desviación estándar) del periodo mayo de 2008 a mayo de 2009 y de enero de 1928 a mayo de 2009.

Gráfico 7
Volatilidad implícita sobre opciones del S&P500
(11 de mayo de 2009, para opciones con vencimiento en 5 días)*



(*) Con el fin de facilitar la comprensión, este gráfico presenta en el eje horizontal el nivel de delta acompañado por el precio de ejercicio (*strike*) correspondiente.
Fuente: elaboración propia, con base en información de Bloomberg.

Se puede apreciar que la volatilidad implícita no corresponde con la volatilidad histórica. Para una muestra de gran tamaño, como lo es la que comprende entre 1928 y 2009, la volatilidad presenta un nivel más bajo, mientras que para un periodo corto y reciente (mayo de 2008 a mayo de 2009), caracterizado por la alta volatilidad del mercado accionario de los Estados Unidos (Ver Gráfico 5), la volatilidad histórica supera la implícita.

²⁴ El delta de una opción *call* cuyo *strike* es significativamente bajo con respecto al precio *spot* (*deep in the money*) tiende a 100, mientras que el de una opción cuyo *strike* es significativamente superior con respecto al precio *spot* (*deep out of the money*) tiende a cero; el delta será 50 al acercarse el precio *spot* al *strike* (*ATM*).

²⁵ En realidad esta probabilidad está dada en la fórmula de B&S al calcular $[N(d_2)]$, pero el delta $[N(d_1)]$ se aproxima a éste (Derman, 2008).

También se puede apreciar que la volatilidad implícita no es constante para todos los niveles de delta o *moneyness*, lo cual es consistente con el concepto de *volatility smile*. No obstante, por la falta de asimetría, no parece una “sonrisa”. Este tipo de *volatility smile* se conoce como *volatility skew* o *volatility smirk*, y es típica de acciones o índices accionarios, donde el mercado busca reconocer que existen “colas anchas”, en especial a la izquierda de la distribución, así como sesgo negativo.

Hull (2003) y Geman (2005) coinciden en dos razones para esta forma no simétrica, ambas resultado de la inhabilidad del movimiento browniano para describir el comportamiento de los precios de los activos financieros. La primera tiene que ver con el hecho que este tipo de *volatility smile* solo se encuentra después de la caída de la bolsa de Nueva York en octubre de 1987. Luego de ese evento los participantes del mercado empezaron a temer la posibilidad de otro evento extremo negativo de esa magnitud, lo cual se conoce como *crashophobia*. La aversión al riesgo de los inversionistas a partir de esa fecha resulta en su disposición a pagar una prima adicional por conseguir protección frente a eventos de este tipo, donde las opciones *put OTM* son la mejor y más económica de las protecciones (Derman, 2004).

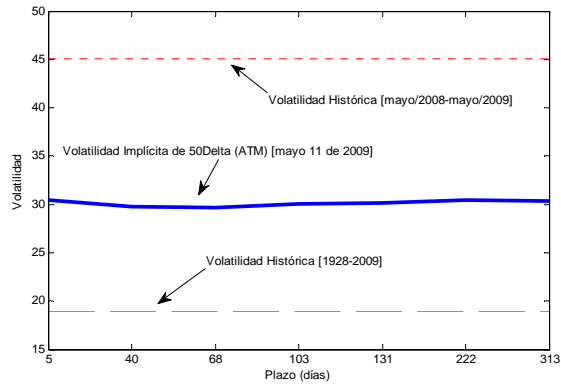
La segunda razón, documentada por primera vez por Black (1973), tiene que ver con el hecho por el que si el precio de la acción de una empresa cae, su nivel de apalancamiento y riesgo de incumplimiento aumentan, y con estos la volatilidad del precio de la acción, por lo que mayores caídas son más probables. Con un argumento similar, Heston (1993) desarrolla un modelo que establece formalmente la existencia de una relación entre el precio de los activos y su volatilidad, donde la correlación entre estos es capaz de explicar la asimetría de la *volatility smile* para el mercado cambiario y de bonos.

La simetría en la volatilidad implícita es más común en el mercado de opciones entre monedas de países industrializados, donde ambas son “igualmente poderosas” (Derman, 2008). Rebonato (1999) documenta evidencia de una ligera *volatility skew* para las monedas de países industrializados, la cual puede caracterizarse, sin pérdida de generalidad, como una *volatility smile*; para monedas de mercados emergentes existe una asimetría similar a la de las acciones o índices accionarios, caracterizada por la sobrevaloración de la volatilidad correspondiente a la depreciación de la moneda local.

De manera más general Derman (2004) señala que cada mercado tiene su propia forma de *volatility smile*, la cual obedece a los temores generados por las experiencias “amargas” de cada uno de ellos: los mercados accionarios temen otro *crash*; los mercados de oro, luego de años de precios bajos, temen un alza repentina; los inversionistas en el mercado de bonos temen que aumentos en las tasas de interés devalúen sus activos, etc.

Respecto a la estructura de plazos [$\sigma(T)$], el Gráfico 8 presenta la volatilidad implícita para opciones *ATM* sobre el índice S&P500 el día 11 de mayo de 2009. Aunque para este día en particular la estructura de plazos es casi plana, no es del todo horizontal.

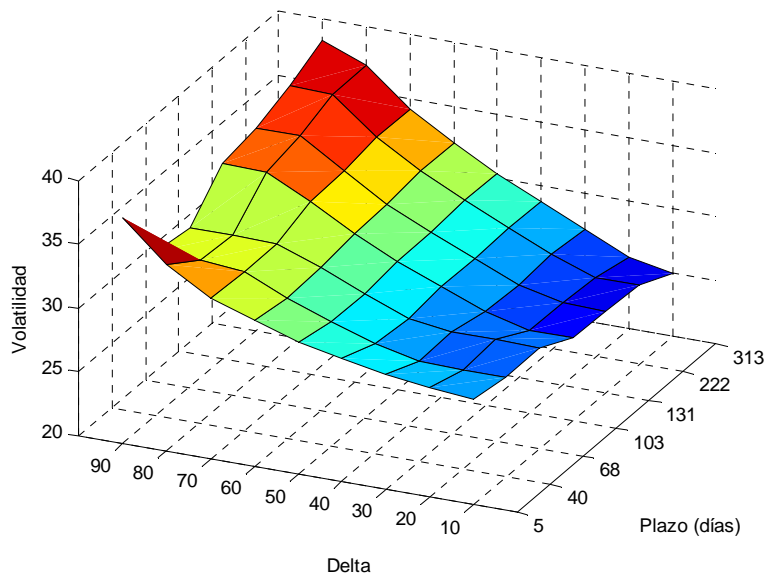
Gráfico 8
Volatilidad implícita sobre opciones del S&P500
(11 de mayo de 2009, para opciones ATM)



Fuente: elaboración propia, con base en información de Bloomberg.

Finalmente, al combinar la *volatility smile* y la estructura de plazos se obtiene la superficie de volatilidad [$\sigma(\text{delta}, T)$]:

Gráfico 9
Superficie de volatilidad del S&P500
(volatilidad implícita sobre opciones del S&P500, 11 de mayo de 2009)



Fuente: elaboración propia, con base en información de Bloomberg.

Según Derman (2004), de esta manera la superficie provee la volatilidad particular [$\sigma(\text{delta}, T)$] que, pese a ser utilizada en el modelo errado (B&S), resulta en el precio correcto de la opción.

4. Modelos de superficie de volatilidad

Un modelo de superficie de volatilidad busca replicar el comportamiento de los precios de los activos financieros, para lo cual debe corregir el supuesto de movimiento browniano. En la literatura existen varias clasificaciones de modelos, entre los cuales se destacan los modelos de (i) volatilidad local; (ii) volatilidad estocástica; (iii) difusión con saltos (*jump-diffusion*), y (iv) volatilidad universal. El siguiente cuadro describe y compara brevemente esta clasificación²⁶.

Cuadro 2
Modelos de superficie de volatilidad

Nombre	Descripción	Ventajas	Desventajas
Volatilidad local	<ul style="list-style-type: none"> • Primer intento por ajustar el modelo de B&S a los precios observados en el mercado a través de la volatilidad. • Consiste en hacer que la volatilidad dependa del nivel del precio del subyacente y el tiempo al vencimiento. • Se conocen también como modelos de volatilidad estocástica restringida o de volatilidad determinística. 	<ul style="list-style-type: none"> • Logra acomodar la existencia de la superficie de volatilidad. 	<ul style="list-style-type: none"> • Asume que el movimiento browniano caracteriza el comportamiento de los activos financieros. • En el largo plazo la superficie es inconsistente (plana). • Su utilidad se limita a opciones sencillas (<i>plain vanilla</i>). • No es verdaderamente un modelo, ya que no explica la presencia de la superficie de volatilidad; solo usa la información de mercado para inferir la superficie.
Volatilidad estocástica	<ul style="list-style-type: none"> • La volatilidad es estocástica y sigue un proceso de reversión a la media con su propia volatilidad y correlación con el subyacente. • Incluye la posibilidad de modelar la volatilidad a través de modelos econométricos (v.g. GARCH). • Se conocen también como modelos de volatilidad estocástica completa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es consistente con la volatilidad de largo plazo; útil para valorar opciones de largo plazo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar la cobertura dinámica del instrumento a través de la compra y venta del subyacente no es posible; dificultad para cubrir la volatilidad de la volatilidad. • Requiere la estimación de varios parámetros del proceso de volatilidad (reversión a la media, volatilidad de largo plazo, volatilidad de la volatilidad y correlación volatilidad-precio del subyacente). • En el corto plazo la superficie es inconsistente (plana).
Difusión con saltos (<i>Jump-Diffusion</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Consiste en adicionar saltos al proceso de movimiento browniano para reconocer el verdadero comportamiento del precio de los activos financieros. • La frecuencia de los saltos se atribuye a una distribución de <i>poisson</i>. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es consistente con la volatilidad de corto plazo, donde existe un <i>smile</i> pronunciado. • Intuitivo, capaz de reconocer de manera sencilla las discontinuidades del mercado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar la cobertura dinámica del instrumento a través de la compra y venta del subyacente no es posible por la discontinuidad del proceso del precio de los activos. • Requiere la estimación de los parámetros del modelo de saltos (magnitud y frecuencia). • En el largo plazo la superficie es inconsistente (plana).
Volatilidad Universal (<i>Universal volatility</i>)	<ul style="list-style-type: none"> • Consiste en una extensión del modelo de volatilidad estocástica. • El proceso estocástico del activo incluye sensibilidad cuadrática al cambio en el nivel del precio del subyacente. • Existen versiones que incluyen saltos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Permite caracterizar de manera completa la superficie de volatilidad. • Permite conocer parámetros de pendiente y curvatura de la superficie. • Puede reconocer saltos en el proceso de la variable. 	<ul style="list-style-type: none"> • Requiere la estimación de los parámetros del modelo de volatilidad estocástica, más dos correspondientes a sensibilidad a cambios en el nivel del precio del subyacente. • Por su complejidad y difícil calibración, solo puede utilizarse en algunos casos.

Fuente: elaboración propia, con base en Rebonato (1999), Ayache *et al.* (2004) y Derman (2008).

²⁶ Con base en Duan (1995), Rebonato (1999), Ayache *et al.* (2004) y Derman (2008). Esta clasificación es de carácter general y no exhaustiva. Existen modelos que combinan o modifican, de diferentes formas, las clasificaciones aquí presentadas.

No obstante, tal como documenta Taleb (1997) y Derman (2004), pese a que se han desarrollado modelos como los presentados en la Cuadro 2, los participantes del mercado evitan nuevos modelos que exigen nuevas estimaciones y prefieren utilizar la volatilidad implícita resultante del modelo de B&S como convención para cotizar precios en el mercado de opciones.

5. Un modelo de superficie de volatilidad en el mercado colombiano

El mercado colombiano de opciones sobre tasas de interés y acciones no existe, mientras que el de opciones sobre tasa de cambio es muy poco desarrollado. De acuerdo con el BIS (2007), el monto total de transacciones en el mercado colombiano de derivados de tipo de cambio *over the counter* (OTC) se concentra en operaciones *forward* (86.4% del total en 2007), mientras que las opciones apenas tienen una participación marginal (1,6%). Como proporción del mercado cambiario de contado, las opciones sobre tasa de cambio alcanzan el 2.11% por monto y el 1.54% por número de transacciones²⁷.

Adicionalmente, para el caso del mercado de opciones colombiano, Gómez (2008) destaca la concentración en opciones *ATM*, el tamaño reducido de las posturas y la amplitud del *bid-ask spread*. En la Cuadro 3 se aprecia que, mientras en mercados de opciones sobre tasas de cambio de países industrializados el *bid-ask spread* intradía promedio en términos de volatilidad es de menos de 90 puntos básicos (pbs), en Colombia es de más de 300; este *spread* es alto también si se compara con México y Brasil.

Cuadro 3
Bid-ask Spreads intradía promedio de volatilidad ATM a un mes – en pbs
(Primer semestre de 2009; peso colombiano, peso mexicano, real brasilero, euro y yen)

	COP	MXN	BRL	EUR	JPY
Media	323,4	239,2	188,2	57,7	86,6
Mediana	350,0	235,0	162,5	56,0	82,5
Desviación Estándar	86,4	78,1	89,3	20,6	31,0
Máximo	700,0	625,0	675,0	164,0	226,5
Mínimo	200,0	45,0	65,0	5,0	10,0

Fuente: elaboración propia, con base en Bloomberg.

Por lo anterior, se puede señalar que no existe como tal un mercado de volatilidad en el caso colombiano, de donde fuese posible calcular directamente la volatilidad implícita a partir del precio de las opciones que se negocian en el mercado.

No obstante, es posible estimar la superficie de volatilidad teórica a través de la simulación del proceso estocástico que siguen los activos financieros en el mercado colombiano. Esta estimación parte de la elección de un proceso estocástico ajustado a la distribución empírica de los cambios de dichos precios, luego de lo cual, utilizando el modelo de B&S, se consigue valorar opciones para diferentes niveles de precio de ejercicio y plazo al vencimiento. Una vez se cuenta con el valor simulado de las opciones, es posible calcular la superficie de volatilidad teórica, que sería aquella que consigue que los precios obtenidos asumiendo movimiento

²⁷ Correspondiente al promedio diario del periodo enero de 2008 a junio de 2009, con información del Banco de la República.

browniano coincidan con los conseguidos utilizando un proceso estocástico ajustado a la realidad.

De acuerdo con las características de las aproximaciones presentadas en la Cuadro 2, en especial por su parsimonia y capacidad para reconocer la existencia de un proceso caracterizado por discontinuidades, este documento utiliza los fundamentos del modelo de difusión con saltos (*jump-diffusion*) propuesto por Merton (1976) para simular el comportamiento de los precios de los activos. Adicionalmente, dado que el mercado de opciones es poco desarrollado (opciones sobre tipo de cambio) o inexistente (sobre renta fija o variable), la escogencia del modelo de difusión con saltos es pertinente dado que logra capturar de mejor manera la dinámica de la superficie de volatilidad de los plazos al vencimiento que primero se desarrollan: los plazos cortos.

Derman (2004) documenta que la mayoría de los participantes del mercado hoy día reconocen que la posibilidad de un salto es el principal factor que determina la forma de la *volatility smile* para plazos muy cortos. La utilización de un proceso de difusión con saltos es conveniente dado su realismo -es capaz de capturar saltos del tipo ocurrido en octubre de 1987 y 1997- (Derman, 2008), así como su capacidad para reconocer la existencia de “colas anchas” en la distribución de retornos de los activos financieros (Wilmott, 2007).

De acuerdo con Gatheral (2006) y Wilmott (2007), el proceso de difusión con saltos para los cambios en el precio de un activo puede definirse de la siguiente manera:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ + JSdq \quad \langle 4 \rangle$$

donde

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda(t)dt \\ 1 & \text{con probabilidad } \lambda(t)dt \end{cases}$$

y

S = precio del activo

J = tamaño del salto

μ = media del proceso de cambios del activo

σ = desviación estándar del proceso de cambios del activo

λ = intensidad del proceso de poisson (frecuencia del salto)

dZ = proceso de movimiento browniano

Un proceso de difusión con saltos reconoce que el comportamiento de los cambios de precios se caracteriza por dos procesos independientes (Merton, 1976; Gatheral, 2006). El primero [dZ], basado en el movimiento browniano, captura el comportamiento normal de cambios de precio del activo; el segundo [dq], basado en la distribución de *poisson*, captura el comportamiento discontinuo de cambios de precio del activo, caracterizado por la ocurrencia de eventos aleatorios de gran magnitud. En los términos acuñados por Mandelbrot (2003), de esta manera se logra capturar la volatilidad ligera (*mild volatility*) y la volatilidad salvaje (*wild volatility*) de los activos, respectivamente.

Con el fin de conseguir los precios con el proceso de difusión con saltos se utiliza el método de simulación de Montecarlo²⁸. La estimación de los parámetros de la simulación incluye la definición del concepto de salto para determinar su tamaño $[J]$ e intensidad $[\lambda]$. Dado que en la literatura consultada no se encontró una metodología estándar para definir lo que es un salto, se asume que saltos son todos aquellos cambios de magnitud mayor a $[h]$ que generan exceso de curtosis en la distribución de frecuencia de los retornos de los precios, donde dicha magnitud $[h]$ se mide en número de desviaciones estándar $[\pm\sigma]$.

A partir de la definición del límite de desviaciones estándar que genera exceso de curtosis $[h]$ ²⁹ se obtienen dos conjuntos de datos: el primero $[Cb]$, cuyo exceso de curtosis es aproximadamente cero, corresponde a los movimientos cuya magnitud estandarizada es igual o inferior a dicho límite, y será utilizado para estimar los parámetros del proceso de difusión o movimiento browniano; el segundo $[Cj]$, correspondiente a los movimientos cuya magnitud excede dicho límite, será utilizado para estimar los parámetros del proceso de saltos.

La estimación de los parámetros de media $[\mu]$ y desviación estándar $[\sigma]$ del proceso browniano, y de intensidad de saltos $[\lambda]$ de proceso *poisson* se realizó de manera tradicional. El tamaño del salto $[J]$ se obtuvo en cada simulación de un muestreo aleatorio uniforme realizado al interior del segundo conjunto de datos $[Cj]$, con lo cual se evita estimar una distribución teórica o ajustada de los saltos y se aprovecha la simulación de Montecarlo para obtener la distribución empírica de estos.

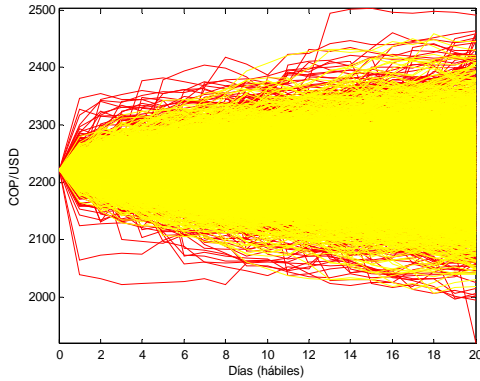
El resultado de esta simulación de precios se presenta a continuación. Para el caso de la tasa de cambio (TRM), en color amarillo aparece el resultado de utilizar el supuesto de movimiento browniano y en rojo el de utilizar el proceso de difusión con saltos.

²⁸ La simulación de los precios de los activos consistió en la realización de 20.000 simulaciones, diarias con un plazo final de 20 días de transacciones. En lo que respecta a la simulación del movimiento browniano, se aplicó la metodología de variable antitética para incrementar la precisión del modelo (Watsham y Parramore, 1997).

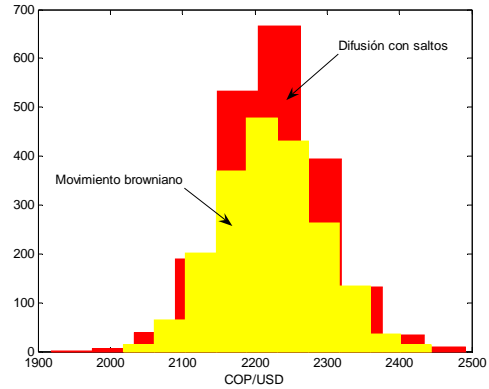
²⁹ El valor del parámetro $[h]$, el cual determina el número de desviaciones estándar luego del cual se considera que un cambio es un salto, es de ± 1.36 en el caso de la TRM, ± 1.68 en el caso del IGBC y ± 1.48 en el caso del IDXTES; estos valores corresponden a una muestra de 219, 147 y 242 saltos, 11.05%, 6.73% y 10.01% del total de la muestra, respectivamente.

Gráfico 10
Resultado de la simulación de precios³⁰
(TRM del día 11 de mayo de 2009, a 20 días)

Simulación de precios



Distribución de frecuencias



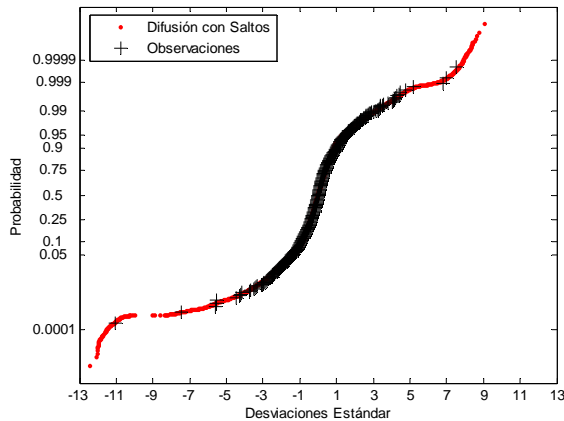
Fuente: elaboración propia con datos de Bloomberg.

Como se aprecia en el gráfico anterior, el proceso de difusión con saltos produce trayectorias de precios más dispersas que las producidas por el proceso de movimiento browniano, por lo que es capaz de reconocer la existencia de “colas anchas”.

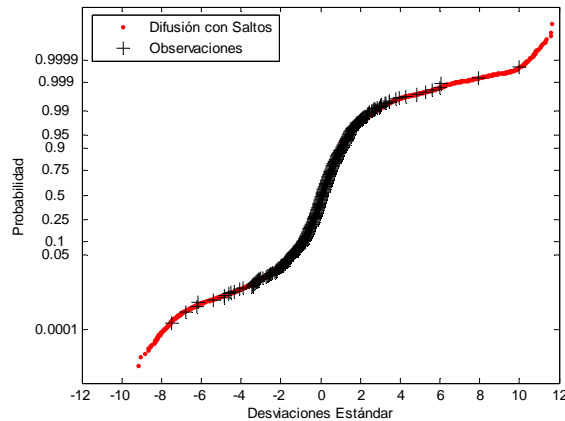
El ajuste de los retornos conseguidos a través de esta simulación con respecto a la distribución empírica de las series de datos se presenta a continuación:

Gráfico 11
Gráficos de probabilidades
(TRM, IGBC y IDXTES)

TRM

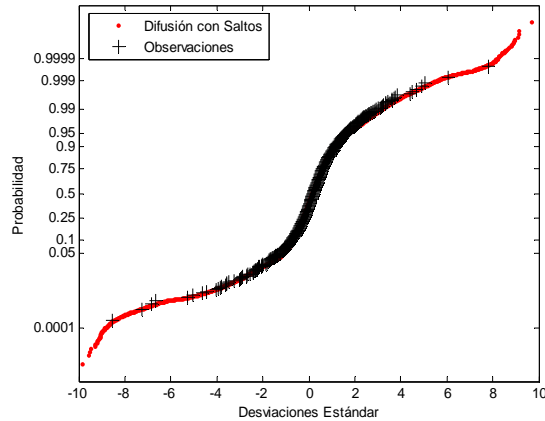


IGBC



³⁰ Pese a que el modelo realiza 20.000 simulaciones, el resultado presentado en el Gráfico 10 solo muestra el resultado de 2.000 de dichas simulaciones.

IDXTES

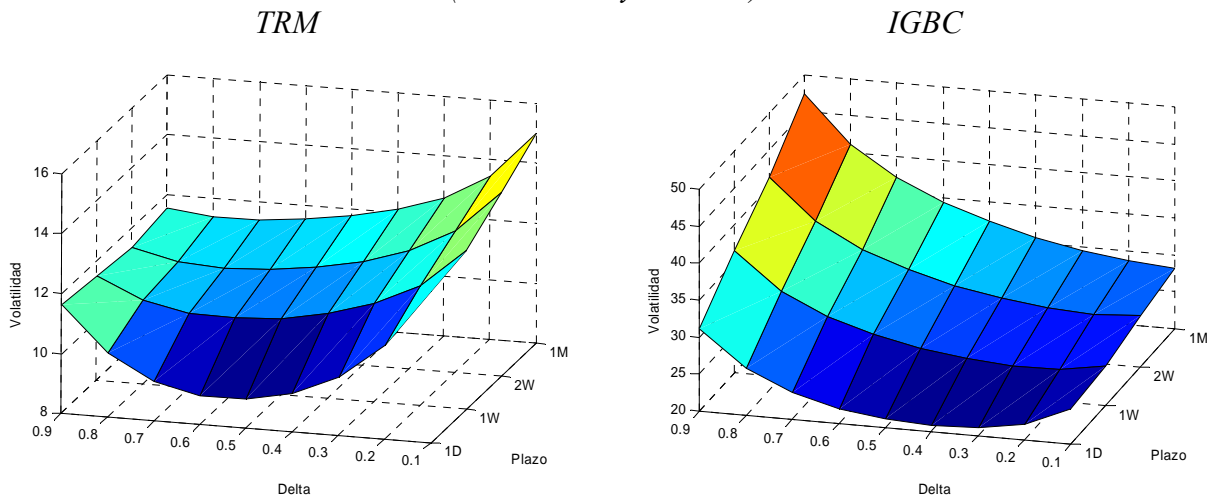


Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

Es notoria la mejoría en cuanto al ajuste de la distribución empírica se refiere, en especial en lo que tiene que ver con los movimientos de gran magnitud con respecto al supuesto de normalidad (Gráfico 4). Es también importante notar que el modelo es capaz de producir eventos más extremos que los observados en la realidad, los cuales no se deben despreciar pese a no haber sucedido.

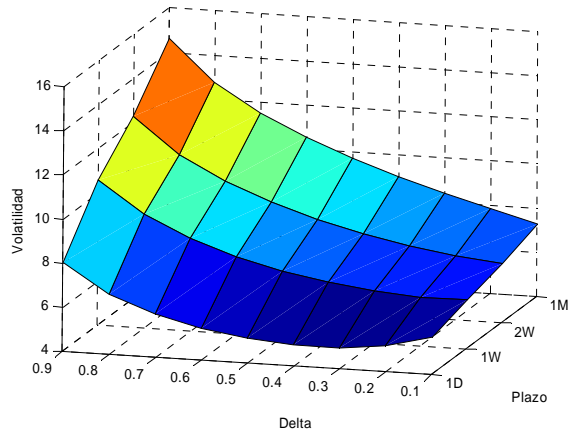
Finalmente, con los precios simulados para varios plazos al vencimiento (un día [1D], una semana [1W], dos semanas [2W] y un mes [1M]) y para varios niveles de *moneyness*, y utilizando la fórmula de B&S para calcular la volatilidad implícita³¹, se obtienen las superficies de volatilidad teóricas para cada activo.

Gráfico 12
Superficies de volatilidad
(TRM, IGBC y IDXTES)



³¹ Para el caso de la TRM se utilizó la adaptación de B&S propuesta por Garman-Kohlhagen.

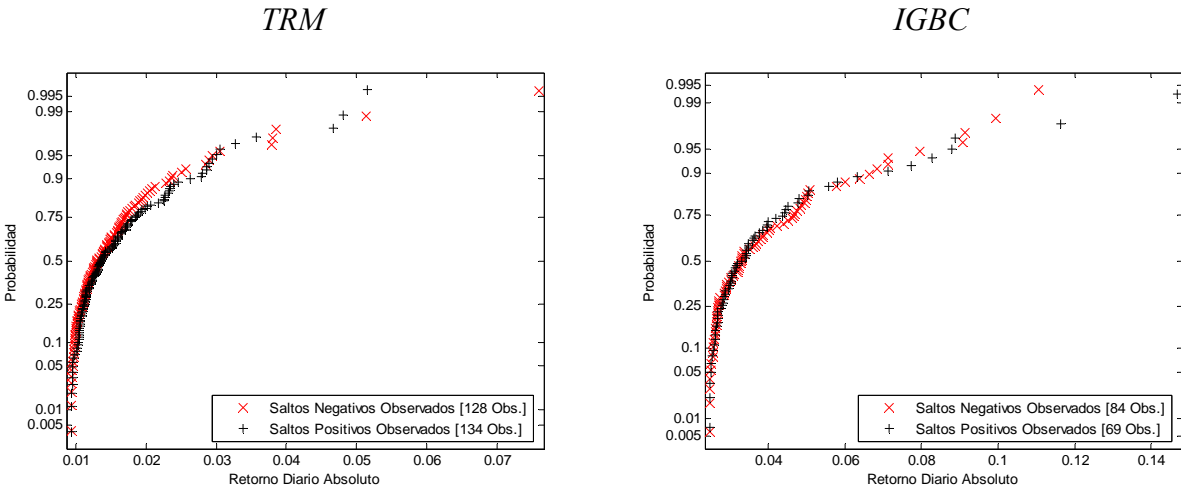
IDXTES



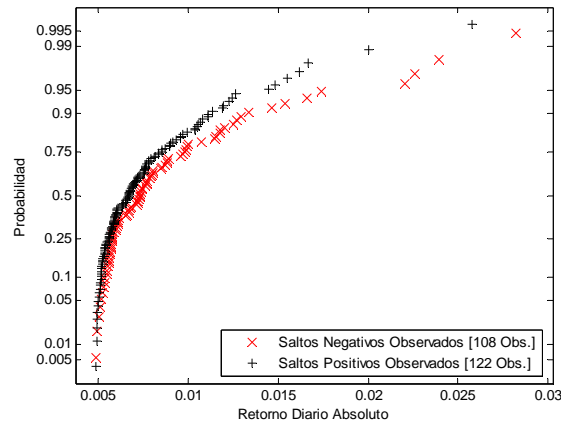
Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

Los resultados son intuitivos y corresponden a lo esperado según la teoría. En el caso de la tasa de cambio (TRM), por ser el peso una moneda débil con respecto a su contraparte, basado en lo ocurrido en el periodo de análisis, los participantes del mercado deberían asignar una volatilidad superior a los escenarios de depreciación del peso, en especial aquellos de fuerte caída de precio del peso. Esto se explica especialmente porque el salto promedio tiene signo positivo y, como muestra el Gráfico 13, aunque el mayor salto es de signo negativo, la cantidad de saltos de signo positivo es mayor.

Gráfico 13
Gráficos de probabilidades para saltos observados
(TRM, IGBC y IDXTES)



IDXTES



Fuente: elaboración propia con datos de Reveiz y León (2008b) y Bloomberg.

En el caso del IGBC, basado en lo ocurrido en el periodo de análisis, los participantes del mercado deberían asignar una volatilidad superior a los escenarios de caída en el mercado accionario, en especial a aquellos que no corresponden al comportamiento normal de este. Lo anterior es consistente con el comportamiento observado en mercados desarrollados, donde también se presenta una *volatility smirk* o *skew* (Gráfico 9). A diferencia de lo encontrado en el caso de la TRM, el salto promedio del IGBC tiene signo negativo y, tal como muestra el Gráfico 13, la cantidad de saltos de signo negativo ocurridos en el periodo en cuestión es mayor que la de saltos de signo positivo.

En cuanto al IDXTES, basado en lo ocurrido en el periodo de análisis, los participantes del mercado deberían asignar una volatilidad superior a los escenarios de caída en el mercado de deuda pública local (TES), en especial a aquellos que no corresponden al comportamiento normal de este. La presencia de esta *volatility smirk* o *skew* se explica por la dominancia de los saltos negativos observados con respecto a los positivos.

6. Comentarios finales

La aplicación propuesta del modelo de difusión con saltos (*jump-diffusion*) consiguió capturar la dinámica del precio de los activos en cuestión de manera efectiva y parsimoniosa, con lo que se obtuvo una aproximación teórica a la superficie de volatilidad para el mercado cambiario, de renta fija y renta variable colombianos. Los resultados encontrados son intuitivos y se ajustan a lo señalado por la evidencia de mercados de opciones desarrollados.

No obstante lo anterior, es necesario reconocer varias limitaciones de esta aproximación. En primer lugar, pese a que Derman (2004) afirma que la forma de la *volatility smile* obedece a los temores generados por las experiencias “amargas” de los mercados, por tratarse de una aproximación basada en información histórica, la superficie de volatilidad teórica obtenida considera al pasado como parámetro de lo que puede suceder en el futuro. Como en todos los

casos en los que se utiliza información histórica, la definición de lo que es información relevante determinará los resultados del modelo³².

Sin embargo, es de resaltar que, como muestra el Gráfico 11, el modelo de difusión con saltos fue capaz de generar eventos extremos no sucedidos en el pasado, lo cual resultó en movimientos cuya magnitud fue superior a la de cualquier observación histórica disponible en la muestra utilizada³³. Este hecho muestra la utilidad del modelo de simulación propuesto en este documento para otros propósitos (v.g. medición de riesgo de mercado), ya que es capaz de generar y considerar escenarios extremos cuyo análisis no es posible a través de herramientas tradicionales tales como el VaR (*Value at Risk*) paramétrico basado en la distribución normal de los retornos de los activos o histórico (no paramétrico). Adicionalmente, la utilización de la difusión con saltos puede apoyar la utilización de herramientas tales como la Teoría de Valor Extremo (*Extreme Value Theory*) en su búsqueda de caracterizar de mejor manera las colas de la distribución de los retornos de los activos.

También es importante reconocer que pese a que la utilización del modelo de difusión con saltos fue capaz de generar eventos extremos, este, en su formulación propuesta, no está diseñado para capturar el grado de dependencia serial (autocorrelación) existente en la evidencia empírica. Esto obedece a que el proceso de saltos (*Poisson*) genera saltos independientes entre sí, al igual que el proceso browniano³⁴.

Finalmente, tampoco se debe perder de vista que esta es una aproximación teórica, cuyo alcance se limita a proveer una base teórica para que el mercado valore opciones y otros productos cuyo precio depende de la volatilidad de un activo. En la medida que el mercado de opciones local se desarrolle será posible conciliar lo encontrado por esta propuesta y la realidad; entre tanto, este puede ser uno de varios puntos de partida para tal desarrollo.

³² Este es el caso documentado en el Gráfico 7, donde una ventana de datos extensa (1928-2009) para el S&P500 produce una volatilidad menor que la que se obtendría utilizando una ventana reducida pero caracterizada por un periodo de alta volatilidad (2008-2009). El proceso de calibración del modelo con datos del mercado –el cual es imposible en este caso por la ausencia de mercado– podría ayudar a encontrar una ventana de información “consistente”.

³³ En ese sentido, el modelo de difusión con saltos tendría la ventaja de mitigar el problema del “cisne negro” (*black swan*) señalado por Taleb (2007). Taleb, al referirse al uso de fractales para modelar la dinámica de los activos financieros, señala que este no hace predecibles los eventos extremos, pero si los hace concebibles, por lo que mitiga dicho problema, aunque no lo soluciona; el modelo de difusión con saltos logra algo similar.

³⁴ Un modelo estándar que sí reconoce la existencia de esta dependencia es el GARCH. Sin embargo, de acuerdo con evidencia documentada por Sornette (2003), el grado de dependencia que consigue el modelo GARCH –basado en una distribución *t-student* con cuatro grados de libertad– es incapaz de reconocer la dependencia observada empíricamente, en especial cuando de eventos extremos se trata.

Referencias

- Ayache, E.; Henrotte, P.; Nassar, S.; Wang, X. “Can anyone solve the smile problem?”, *Wilmott Magazine*, No.1, enero, 2004.
- Bachelier, L., “Théorie de la Speculation”, *Annales de l’Ecole Normale Supérieure*, Tercera Serie, Tomo 17, 1900.
- Belkacem, L., Lévy Véhel, J. y Walter, C., “CAPM, Risk and Portfolio Selection in ‘Stable’ Markets”, *Rapport de Recherche*, No. 2776, INRIA, enero, 1996.
- BIS. *Foreign exchange and derivatives market activity in 2007 - Triennial Central Bank Survey* [documento en línea], www.bis.org, 2007, consultado el 2 de Julio de 2009, en <<http://www.bis.org/publ/rpfxf07t.pdf?noframes=1>>.
- Black, F.; Scholes, M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 1973.
- Boness, A.J. “Elements of a Theory of Stock-Option Value”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 72, No. 2, abril, 1964.
- Brown, R. “A Brief Account of Microscopical Observations – On the Particles Contained in the Pollen of Plants and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies”, 1828.
- Brown, R., “Additional Remarks on Active Molecules”, 1829.
- Cont, R.; da Fonseca, J. “Dynamics of Implied Volatility surfaces”, *Quantitative Finance*, Research Paper, Institute of Physics Publishing, Vol.2, 2002.
- de Lara, A. *Medición y Control de Riesgos Financieros*, Segunda Edición, Limusa, 2002.
- Derman, E. “Laughter in the Dark: An Introduction to the Volatility Smile – Lecture Notes” [documento en línea], www.ederman.com, 2008, consultado el 25 de junio de 2009, en <<http://www.ederman.com/new/docs/laughter.html>>.
- Derman, E. *My Life as a Quant*, John Wiley & Sons, 2004.
- Duan, J-C. “The GARCH Option Pricing Model”, *Mathematical Finance*, Vol.5, No.1, 1995.
- Einstein, A. “On the Movement of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic theory of Heat”, *Annalen der Physik*, 1905.
- Fama, E., “The Behavior of Stock-Market Prices”, *The Journal of Business*, Vol. 38, No.1, 1965.
- Gatheral, J. *The Volatility Surface: A Practitioner’s Guide*, Wiley Finance, 2006.
- Geman, H. *Commodities and Commodity Derivatives*, John Wiley & Sons, 2005.
- Gómez, A. “Estimación de una Superficie de Volatilidades para las Opciones sobre la Tasa de Cambio USDCOP”, Tesis para optar por el título de magíster en Economía, Bogotá, Universidad Javeriana, 2008.
- Haug, E.G. *Derivatives: Models on Models*, John Wiley & Sons, 2007.
- Haug, E.G.; Taleb, N.N. “Why We Have Never Used the Black-Scholes-Merton Option Pricing Formula” [documento en línea], febrero, 2009, consultado el 10 de mayo de 2009, en <<http://ssrn.com/abstract=1012075>>.

- Heston, S. “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”, *The Review of Financial Studies*, Vol.6, No.2, 1993.
- Hull, J. *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2003.
- Kendall, M.G.; Hill, B.A. “The Analysis of Economic Time-Series-Part I: Prices”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, Vol.116, No.1, 1953.
- León, C.; Laserna, J.M. “Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo”, Borradores de Economía, No.523, Banco de la República, 2008. [próximo a publicar en Laserna, J.M. y Gómez, M.C. (eds.), *Pensiones y Portafolio: La Construcción de una Política Pública*, Banco de la República y Universidad Externado de Colombia, 2009]
- León, C.; Oker, B. “Analyzing the dynamics behind the volatility surface”, Tesis para optar por el título de magíster de ciencias en Banca y Finanzas, Université de Lausanne – École des HEC, consultado el 10 de mayo de 2009, en http://www.hec.unil.ch/cms_mbf/master_thesis/0503.pdf.
- Malevergne, Y.; Sornette, D. *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer-Verlag, 2006.
- Malz, A. “An Introduction to Currency Option Markets”, en Chen, Z. (ed.), *Currency Options and Exchange Rate Economics*, World Scientific, 1998.
- Malz, A. “Do implied volatilities provide early warning of market stress?”, Working Paper, No.00-01, The Risk Metrics Group, 2000.
- Mandelbrot B.; Hudson R.L. *The (Mis)Behavior of Markets*, Basic Books, 2004.
- Mandelbrot, B. “Heavy Tails in Finance for Independent or Multifractal Price Increments”, en Rachev, S.T. (ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier Science, 2003.
- Mandelbrot, B. “The Variation of Certain Speculative Prices”, *The Journal of Business*, Vol.36, No.4, 1963.
- Markowitz, H.M. “Portfolio Selection”, *The Journal of Finance*, Vol.7, No.1, marzo, 1952.
- Merton, R.C. “Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous”, *Journal of Financial Economics*, No.3, 1976.
- Mikosch, T. *Elementary Stochastic Calculus*, Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Vol.6, World Scientific, 2004.
- Mills, F.C., *The Behavior of Prices*, NBER, 1927.
- Mitchell, W.C. “The Making and Using of Index Numbers,” en *Introduction to Index Numbers and Wholesale Prices in the United States and Foreign Countries*, Bulletin No. 173, U.S. Bureau of Labor Statistics, 1915.
- Neftci, S.N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Segunda Edición, Academic Press, 2000.
- Neftci, S.N. *Principles of Financial Engineering*, Elsevier Academic Press, 2004.
- Osborne, M.F.M. “Brownian Motion in the Stock Market”, *Operations Research*, Vol.7, No.2, marzo-abril, 1959.
- Rebonato, R. *Plight of the Fortune Tellers*, Princeton University Press, 2007.
- Rebonato, R. *Volatility and Correlation: In the Pricing of Equity, FX and Interest-Rate Options*, John Wiley & Sons, 1999.

- Reuters, *Reuters Financial Glossary*, Pearson Education, 2003.
- Reveiz, A. y León, C. “Índice representativo del mercado de deuda pública interna: IDXTES”, Borradores de Economía, No.488, Banco de la República, 2008b.³⁵ [próximo a publicar en Laserna, J.M. y Gómez, M.C. (eds.), *Pensiones y Portafolio: La Construcción de una Política Pública*, Banco de la República y Universidad Externado de Colombia, 2009]
- Reveiz, A.; León, C., “Efficient Portfolio Optimization in the Wealth Creation and Maximum Drawdown Space”, Borradores de Economía, No.520, Banco de la República, 2008. [próximo a publicar en Berkelaar, A.; Coche, J.; Nyholm, K. (eds.), *Interest Rate Modelling, Portfolio Optimization and Quantitative Techniques for Central Banks and Sovereign Wealth Funds*, European Central Bank - World Bank – BIS, Palgrave Macmillan, 2009]
- Roy, D. “Safety First and the Holding of Assets”, *Econometrics*, Vol.20, No.3, julio, 1952.
- Samuelson, P. “Mathematics of Speculative Price”, *SIAM Review*, Vol.15, No.1, enero, 1973.
- Samuelson, P. “Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly”, *Industrial Management Review (IMR)*, Vol.6, No.2, 1965.
- Samuelson, P. “Rational Theory of Warrant Pricing”, *(IMR) Industrial Management Review*, Vol.6, No.2, 1965b.
- Samuelson, P.; Crowley, K. *The Collected Scientific Papers of Paul Samuelson*, Vol.5, The MIT Press, 1986.
- Sharpe, W.F. “Capital Asset Prices: A Theory of Equilibrium under Conditions of Risk”, *The Journal of Finance*, Vol.19, No.3, septiembre, 1964.
- Sornette, D. *Why Stock Markets Crash*, New Jersey, Princeton University Press, 2003.
- Taleb, N.N. *Dynamic Hedging*, John Wiley & Sons, 1997.
- Taleb, N.N. *The Black Swan*, Random House, 2007.
- Thorp, E. y Kassouf, S. *Beat the Market: A Scientific Stock Market System*, Random House, 1967.
- Watsham, T.J.; Parramore, K. *Quantitative Methods in Finance*, International Thomson Business Press, 1997.
- Wiener, N. “Differential Space”, *Journal of Mathematics and Physics*, No.2, 1923.
- Wilmott, P. *Frequently Asked Questions In Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2007.
- Wilmott, P. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2007b.

³⁵ La serie histórica del índice IDXTES está disponible en: http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/IDXTES_web.xls.