



ENSAYOS

sobre política económica

Desagregación de series temporales: metodología y aplicación al caso del PIB en Colombia

Fernando Melo V.
Martha Misas A.

Revista ESPE, No. 22, Art. 06, Junio de 1992
Páginas 151-170



Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista *Ensayos Sobre Política Económica* (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando nadie obtenga lucro por este concepto y además cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además colocar en su propio website una versión electrónica del documento, siempre y cuando ésta incluya la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción del documento para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro website, requerirá autorización previa del Editor de ESPE.

Desagregación de series temporales: metodología y aplicación al caso del PIB en Colombia

**Fernando Melo V.
Martha Misas A.***

Resumen

En este documento se presenta una metodología econométrica desarrollada por Guerrero (1990), que permite construir un estimador para reducir la periodicidad de series temporales. Bajo esta metodología, la estimación de la serie desagregada, es decir, de mayor frecuencia, se realiza replicando la dinámica capturada por la estructura de un modelo ARIMA de la serie indicadora considerando las restricciones impuestas por la serie agregada. Adicionalmente, una aplicación del método se lleva a cabo realizando una estimación trimestral del PIB anual colombiano para el período 1980-1991.

* Las opiniones expresadas son responsabilidad exclusiva de los autores. Se agradecen los comentarios de Olga Lucía Acosta, Alberto Carrasquilla y Roberto Steiner y la colaboración de Pablo García.

I Introducción

Uno de los problemas al que a veces se ve enfrentado el investigador es la imposibilidad de conseguir información en la periodicidad que requiere. Dicha imposibilidad proviene del hecho de que algunas variables económicas se encuentran disponibles, tan solo, de manera agregada ¹.

Este documento tiene por objeto presentar y replicar una metodología desarrollada por Guerrero (1990), la cual permite construir un estimador óptimo de la serie desagregada, obviando así el problema de la información no observada.

Antes de producir este estimador, se requiere una estimación preliminar, la cual debe ajustarse a restricciones impuestas por la serie agregada. Esta estimación preliminar se obtiene partiendo de variables indicadoras, correlacionadas con la variable que se desagrega y seleccionadas con criterio económico.

En este documento se aplica esta metodología utilizando como serie agregada el Producto Interno Bruto anual a precios constantes de 1975, para el período 1980-1991. Como variables indicadoras, utilizamos un conjunto de series observadas trimestralmente.

El documento se organizó en cuatro partes; en la segunda se introduce el marco analítico. En la tercera, se presentan las diferentes desagregaciones del PIB obtenidas a partir de las distintas variables indicadoras. Finalmente, las conclusiones se reseñan en la cuarta sección.

II Marco analítico

La metodología que utilizamos parte de una serie indicadora, observada de manera desagregada (trimestral), y llega a la estimación de una serie "desagregada" que sólo es observable de manera agregada (anual).

¹ Durante este trabajo, por *desagregación* de una variable, nos referimos a una periodicidad menor de sus datos. Por ejemplo, los datos trimestrales de una serie anual.

La estimación de la serie desagregada (trimestral, mensual, etc.) bajo esta metodología consiste en replicar la dinámica, capturada por la estructura de un modelo ARIMA, de la serie indicadora, bajo las restricciones impuestas por la serie agregada.

A) Definiciones básicas

Como paso inicial se requiere realizar una regresión lineal entre la variable agregada y los valores agregados (anuales) de la variable indicadora, con el objeto de manejar escalas similares para ambas series.

Adicionalmente, esta metodología provee una prueba estadística que permite decidir si existe compatibilidad entre la variable indicadora reescalada y la variable agregada, lo cual puede servir de criterio estadístico para seleccionar la variable indicadora utilizada en el proceso.

Formalmente, tenemos las siguientes variables observadas:

1. $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ variable agregada (serie anual).
2. $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}; \dots; x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm})$ variable indicadora ($m=4$, serie trimestral).

Esta variable, escogida con criterios económicos, debe proporcionar la estructura ARIMA de la variable desagregada Z , donde

3. $Z = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}; z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}; \dots; z_{n1}, z_{n2}, \dots, z_{nm})$ variable no observada.
4. $W = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1m}; w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2m}; \dots; w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm})$ variable indicadora reescalada (serie trimestral).

y queremos obtener:

5. $\hat{Z} = (\hat{z}_{11}, \hat{z}_{12}, \dots, \hat{z}_{1m}; \hat{z}_{21}, \hat{z}_{22}, \dots, \hat{z}_{2m}; \dots; \hat{z}_{n1}, \hat{z}_{n2}, \dots, \hat{z}_{nm})$ estimación de la serie desagregada (en nuestro caso PIB trimestral).

La siguiente relación expresa a la serie Z^2 como la desagregación de Y :

$$Y = C*Z$$

² Una estimación de la serie no observada $\{Z\}$ es $\{\hat{Z}\}$.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & C_2 & \dots & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & C_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{1m} \\ Z_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{nm} \end{bmatrix}$$

donde cada vector C_i está conformado por m elementos.

Dependiendo del tipo de agregación, C_i ($i=1,2, \dots, n$) puede tomar una de las siguientes formas ³:

1. El dato anual es igual a la suma de los cuatro trimestres:

$$C_i = (1, 1, \dots, 1) \text{ implica que } Y_i = \sum_{j=1}^m Z_{ij}$$

2. El dato anual es igual al promedio de los cuatro trimestres:

$$C_i = (1/m) \cdot (1, 1, \dots, 1) \text{ implica que } Y_i = \frac{\sum_{j=1}^m Z_{ij}}{m}$$

3. El dato anual es igual al dato del primer trimestre:

$$C_i = (1, 0, \dots, 0) \text{ implica que } Y_i = Z_{i1}$$

4. El dato anual es igual al dato del último trimestre:

$$C_i = (0, 0, \dots, 1) \text{ implica que } Y_i = Z_{im}$$

B) Estimación preliminar

Una vez comprobado que las series X y Y presentan el mismo grado de integración, se plantea una relación lineal entre la variable Y y X^* ⁴ con el objeto de crear una nueva

³ Aunque la referencia se hace sobre trimestres y años, esto puede ser generalizado a diferentes periodicidades.

⁴ Transformación lineal de la variable indicadora X , en nuestro caso cada valor de X^* es la suma de los cuatro trimestres del año correspondiente.

variable W^5 que sea compatible en escala con Y . Esto puede ser expresado matemáticamente, así:

$$Y_T = \beta_0 + \beta_1 X_T^* + \varepsilon_T \quad \text{con } T=1, \dots, n$$

donde

$$X_T^* = (X_{T1}, X_{T2}, \dots, X_{Tm}) * C_T$$

es importante enfatizar que la forma vectorial de C_T depende del tipo de agregación utilizada.

De otra parte, los parámetros $\hat{\beta}_i$, se usan así:

$$W_t = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1 X_t \quad \text{con } t=1, \dots, nm$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0^* &= \hat{\beta}_0/m \quad \text{si } C_T = (1, 1, \dots, 1) \\ \hat{\beta}_0^* &= \hat{\beta}_0 \quad \text{si } C_T = (1, 0, \dots, 0) \text{ o } C_T = (0, 0, \dots, 1) \\ \hat{\beta}_0^* &= \hat{\beta}_0 \quad \text{si } C_T = (1/m) * (1, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

W puede ser entendida como la primera aproximación a la serie Z .

C) Compatibilidad entre W y Y

Una vez obtenido el vector W (con dimensión nm , en nuestro caso trimestral), la bondad de la aproximación entre W y Y es efectuada mediante una prueba de compatibilidad, donde las hipótesis nula y alterna son planteadas como:

$$\begin{aligned} H_0 &: W \text{ es compatible con } Y (Y = CW) \\ H_1 &: W \text{ no es compatible con } Y (Y \neq CW) \end{aligned}$$

Es importante resaltar que la prueba de compatibilidad evalúa sólo la aproximación entre los valores de Y y los valores agregados, u obtenidos mediante alguna de las combinaciones lineales anteriormente indicadas, de la variable indicadora (W) y no la aproximación de las estructuras intra anuales entre las series W y Z (desagregación no observada de Y).

La construcción de la estadística de la prueba conlleva la identificación y estimación de un modelo ARIMA⁶ sobre la serie W . Esta estimación permite construir una matriz (ψ) cuyos elementos provienen de los coeficientes del polinomio generado por la descomposición de Wold sobre dicho modelo.

⁵ Obtenida mediante una transformación lineal de X_t .

⁶ Para mayor información véase Box-Jenkins (1976).

Así, el modelo ARIMA sobre la serie W puede ser expresado como:

$$\phi(B) d(B) W_t = \theta(B) \epsilon_t$$

y suponiendo que hay invertibilidad:

$$W_t = \left(\frac{\theta(B)}{\phi(B) d(B)} \right) \epsilon_t$$

Con:

$$W_t = \psi(B) \epsilon_t \quad \text{donde } \psi(B) = (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)$$

Finalmente, la estadística de la prueba se construye de la siguiente manera:

$$\hat{K}_W = \frac{(Y-CW)'*(C*\Psi*\Psi'*C')^{-1}*(Y-CW)}{\hat{\sigma}_\epsilon^2}$$

donde:

- C matriz de contrastes de orden n*nm
- ϵ residuales del modelo ARIMA de W
- $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ varianza estimada de la serie de residuales ϵ del modelo ARIMA
- \hat{K}_W sigue una distribución χ^2 con n-2 grados de libertad ⁷.

La matriz ψ es construida de la siguiente forma:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_1 & \psi_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \psi_{nm-1} & \psi_{nm-2} & \dots & \psi_0 \end{bmatrix}$$

A un nivel de significancia α se rechaza H_0 , es decir, no existe compatibilidad entre (Y, W), cuando la estadística \hat{K}_W es mayor que el percentil $1-\alpha$ de la distribución χ^2 con n-2 grados de libertad.

El hecho de no rechazar H_0 permite continuar con el proceso, en tanto que el rechazo de H_0 implica la búsqueda de otra variable indicadora.

⁷ Donde n, en este caso, corresponde al número de restricciones impuestas sobre W.

D) Estimación de la serie desagregada Z

En caso de que H_0 no sea rechazada, se procede a realizar la estimación de la serie desagregada. Así:

$$\hat{Z} = W + \hat{A}(Y - CW)$$

donde:

$$\hat{A} = \psi P \psi' C' (C \psi P \psi' C')^{-1}$$

1. Estimación preliminar

En este paso se asume $P = I$ con I una matriz idéntica de orden $nm \times nm$. Por lo tanto, \hat{Z} puede definirse bajo la siguiente expresión:

$$\hat{Z} = W + \hat{A}(Y - CW)$$

$$\hat{A} = \psi I \psi' C' (C \psi I \psi' C')^{-1}$$

Con el fin de verificar si la condición impuesta sobre la matriz P , $P = I$ se satisface, es necesario construir una serie $\{a_t\}$ $t = 1, \dots, nm$; la cual puede ser interpretada como una diferencia ponderada entre la estimación de la serie desagregada y la transformación lineal de la variable indicadora.

Así:

$$\hat{a} = \psi^{-1}(\hat{Z} - W)$$

La condición $P = I$ se cumple si $\{a_t\}$ se comporta como una serie ruido blanco. Este chequeo es realizado mediante las estadísticas de Box-Pierce y/o Ljung-Box ⁸. Si esta condición es aceptada, \hat{Z} definida anteriormente como estimación preliminar, se considera como la estimación final de la serie desagregada. La matriz estimada de varianza-covarianza de \hat{Z} utilizada en la construcción de los intervalos de confianza para esta serie se define como:

$$C\hat{O}V((\hat{Z} - Z)/W) = \sigma^2(I - \hat{A}C)\psi\psi'$$

donde:

⁸ Una descripción de estas estadísticas puede consultarse en Brockwell (1990).

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\hat{Z}-W)'(\psi\psi')^{-1}(\hat{Z}-W)}{nm-r}$$

siendo r: No. de parámetros del modelo ARIMA de W.
cumpliendo con dos propiedades:

1. $E[\hat{Z}_t] = Z_t$ para $t = 1, 2, \dots, nm$
2. La matriz de varianza-covarianza presentada anteriormente es positiva semidefinida.

2. Estimación final

Cuando la condición $P = I$ no se cumple, es decir, la serie $\{a_t\}$ no es ruido blanco, la estimación final de la serie desagregada requiere la construcción de una matriz tipo ψ^* (ψ^*) conformada a partir de la descomposición de Wold de un modelo ARIMA sobre la serie:

$$\tilde{Z} = \hat{Z} - W$$

utilizando la identidad:

$$\psi^* \psi^{*'} = \psi P \psi'$$

la estimación final se define como:

$$\hat{Z}^F = W + \hat{A}^*(Y - CW)$$

donde:

$$\hat{A}^* = (\psi^* \psi^{*'})' C' (C \psi^* \psi^{*'} C')^{-1}$$

la matriz de varianza-covarianza utilizada en la construcción de los intervalos de confianza de la serie \hat{Z}^F es:

$$CÓV((\hat{Z}^F - Z)/W) = \hat{\sigma}^{*2} (I - \hat{A}^* C) \psi^* \psi^{*'}$$

$$\text{con: } \hat{\sigma}^{*2} = \frac{(\hat{Z}^F - W)'(\psi^* \psi^{*'})^{-1}(\hat{Z}^F - W)}{nm-r}$$

siendo r: No. de parámetros del modelo ARIMA de \tilde{Z}

* La matriz ψ^* es construida siguiendo el mismo esquema utilizado en la matriz ψ , parte C de la sección II.

Satisfaciendo:

1. $E[\hat{Z}_t^F] = Z_t$ para $t=1,2,\dots,nm$
2. La matriz de varianza-covarianza presentada anteriormente es positiva - semidefinida.

E) Formulación general de la estimación preliminar

Una formulación más general para obtener la estimación preliminar de la serie W ¹⁰ se puede obtener utilizando información que incluye más de una variable indicadora. Generalizando el proceso para una sola variable, la relación lineal entre la variable agregada y k variables indicadoras se plantea de la siguiente forma:

$$Y_T = \beta_0 + \beta_1 X_{1,T}^* + \beta_2 X_{2,T}^* + \dots + \beta_k X_{k,T}^* + \varepsilon_T \text{ con } T=1,\dots,n$$

donde

$$\begin{aligned} X_{i,T}^* &= (X_{i,T1}, X_{i,T2}, \dots, X_{i,Tm})^* C_T^* \\ i &= 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

e igualmente la estimación preliminar se logra mediante la siguiente expresión:

$$W_t = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1 X_{1,t} + \hat{\beta}_2 X_{2,t} + \dots + \hat{\beta}_k X_{k,t} \text{ con } t=1,\dots,nm$$

La estimación de los β puede realizarse utilizando mínimos cuadrados ordinarios bajo el supuesto que $\text{COV}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Si dicho supuesto no se cumple, esta estimación también es adecuada puesto que no afecta a \hat{Z}^F ni a su precisión, debido a que los estimadores de los β siguen siendo, primero, insesgados y segundo, \hat{Z}^F y $\text{COV}((\hat{Z}^F - Z)/W)$ no dependen de $\text{COV}(\varepsilon)$.

III Aplicación de la metodología

Para la replicación de esta metodología se toma como variable que se desagrega el Producto Interno Bruto anual a precios constantes de 1975.

¹⁰ Dada en la parte B de la sección II.

A) Selección de variables indicadoras

Como se mencionó anteriormente, el conjunto de variables indicadoras debe ser seleccionado inicialmente con un criterio económico, teniendo en cuenta problemas de medición o "shocks" exógenos que pueden alterar la estimación de la serie desagregada ¹¹.

Para el caso del PIB puede optarse por escoger un conjunto de variables representativas de los sectores más importantes, cuya agregación replique lo más exactamente el PIB, como, por ejemplo, los índices de producción de la industria, el comercio, la ganadería, la minería, etc. Así mismo, es viable trabajar con variables que estén asociadas a varias actividades, como es el caso del consumo de energía y el de gasolina. O bien, pueden escogerse variables de tipo más general que asociadas a todas las actividades económicas muestren los ciclos del PIB; tal sería el caso, entre otras, del empleo, los salarios pagados o alguna medida monetaria de transacciones.

En la medida que el objetivo de este trabajo no es la trimestralización del PIB, sino la exposición de una metodología para obtener estimaciones de ciertas variables con una periodicidad mayor a la cual se calculan corrientemente, no entramos en la discusión de cuál de las anteriores alternativas produciría la trimestralización óptima del PIB.

Se trabajó con el Índice de Producción Industrial Manufacturera total y sin trilla de café, en razón de la importante contribución de la industria dentro del PIB (más del 20%). Así mismo, con el índice de producción de la industria manufacturera de alimentos, se procuraba captar la incidencia del sector agropecuario, que tiene una participación similar a la de la industria, dentro del PIB.

Al mismo tiempo, se utilizaron otras variables consideradas indicadoras líderes por la posibilidad teórica que tienen de reflejar los ciclos del PIB. Ellas fueron: el consumo de energía para usos industriales (Energía I), el total facturado de energía (Energía total) y el consumo de gasolina motor (Motor). Así mismo, se trabajó con series de producción de materiales básicos como el cemento y el acero, las cuales además de ser los principales indicadores de la construcción pública y privada y de un conjunto de sectores asociados a esta actividad, ofrecen información sobre la tendencia de la inversión.

B) Resultados

Dado que el PIB es integrado de orden 1, la primera etapa del trabajo consiste en establecer que las series indicadoras sean integradas de este mismo orden. Adicionalmente, el orden de integración es necesario para identificar los modelos ARIMA de las variables indicadoras, los cuales son presentados posteriormente.

¹¹ Estos "shocks" pueden ser considerados en el modelo ARIMA de la serie indicadora por medio de un modelo de intervención.

CUADRO 1

Prueba de Dickey-Fuller sobre existencia de raíces unitarias

Serie	Estadística	Número de rezagos en la parte aumentada	Ljung-Box (p-value)	Valor crítico (5%)
Energía industrial	$\tau_1: -2.42$	3	6.57 (0.88)	-3.51
Cemento	$\tau_1: -3.01$	4	4.53 (0.97)	-3.52
Energía total	$\tau_1: -1.88$	6	7.62 (0.81)	-3.52
Acero	$\tau_1: -1.42$	7	6.28 (0.90)	-2.94

Número de observaciones: 48.

CUADRO 2

Prueba de Pierre Perron sobre existencia de raíces unitarias

Serie	Estadística	Número de rezagos	Ljung-Box (p-value)	λ	Valor crítico (5%)
Motor	-3.43	1	8.96 (0.63)	0.6	-3.95
Índice producción industria de alimentos	-2.69	4	13.04 (0.37)	0.2	-3.80
Índice producción industria manufacturera sin trilla de café	-1.87	4	13.16 (0.36)	0.3	-3.87
Índice producción industria manufacturera	-2.63	4	10.92 (0.54)	0.3	-3.87

Los Cuadros 1 y 2 presentan los resultados de las pruebas de Dickey-Fuller (1981) y Perron (1989) sobre existencia de raíces unitarias ¹². Las pruebas de Perron son

¹² Para mayor información, véase Melo et al. (1991).

realizadas para la serie Motor y los tres índices trabajados como variables indicadoras, debido a que presentan cambios de tendencia en el período de estudio, lo que sesgaría la prueba tradicional de Dickey-Fuller. En todas las series no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de presencia de raíz unitaria a un nivel de significancia del 5%.

Cabe señalar que otras series tales como salarios, trilla y producción de café fueron descartadas del conjunto de variables indicadoras por ser de un orden de integración diferente al requerido.

En la Cuadro 3 se presentan los parámetros estimados de las regresiones con datos anuales entre la variable o las variables indicadoras y el PIB. Es de recordar que estos parámetros tienen como objeto transformar las variables indicadoras de tal forma que estas nuevas variables alcancen niveles similares a los del PIB ¹³.

Los ocho primeros grupos de coeficientes del Cuadro 3 son estimados mediante regresiones simples, es decir, involucrando una sola variable indicadora, en tanto que en los dos últimos los coeficientes son estimados a partir de regresiones múltiples seleccionadas mediante criterios estadísticos.

CUADRO 3
Parámetros estimados bajo regresión para el cambio de escala
(Generación de W_t)

Serie	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2$
Energía industrial	154138	0.102
Gasolina motor	-39139	19.77
Cemento	101578	0.09
Acero	203464	1.36
Energía total	180365	0.03
Índice producción industria de alimentos	96510	4881.5
Índice producción industria manufacturera sin trilla de café	51618	5410.93
Índice producción industria manufacturera	42998	5534
Motor, energía total	136087	2.836 0.0234
Motor, cemento	0	8.435 0.0615

¹³ Esta transformación es efectuada mediante una combinación lineal de los coeficientes del Cuadro 3 aplicados sobre la variable o variables indicadoras, generando así una nueva serie trimestral W en cada caso.

En el Cuadro 4 se encuentran los modelos ARIMA, estimados sobre las variables W_t definidas anteriormente ¹⁴, que permiten construir la matriz ψ que es utilizada en el cálculo de la estadística de la prueba de compatibilidad. Como puede ser observado, cada uno de los modelos incluye una diferenciación de orden uno de acuerdo con los resultados presentados en los Cuadros 1 y 2.

CUADRO 4
Modelos ARIMA de las variables W_t

Serie W_t	Modelo (estadísticas t)	Ljung-Box (p-value)	Std del error
Energía industrial	$(1+0.310B^2)(1-B)(1-B^2)W_t = (1-0.885B^4) \epsilon_t$ (-1.95) (5.42)	6.66 (0.757)	3052
Motor	$(1+0.455B+0.268B^2)(1-B)W_t = \epsilon_t$ (-3.54) (-2.06)	5.46 (0.859)	12751
Cemento	$(1+0.300B^2-0.488B^3)(1-B)W_t = \epsilon_t$ (-2.22) (3.55)	6.85 (0.739)	5435
Energía total	$(1-0.450B^2)(1-B)(1-B^2)W_t = (1-0.689B^4) \epsilon_t$ (2.98) (5.58)	4.38 (0.929)	1696
Acero	$(1+0.40B^2+0.37B^3)(1-B)W_t = 782.19 + (1-0.66B+0.42B^2) \epsilon_t$ (-2.6) (-2.5) (1.5) (5.7) (-3.5)	7.64 (0.469)	7778
Indice producción industria de alimentos	$(1+0.513B + 0.412B^2)(1-B)W_t = \epsilon_t$ (-5.30) (-4.10)	6.53 (0.769)	7534
Indice de producción industria manufacturera sin trilla de café	$(1+0.337B-0.733B^2)(1-B)W_t = \epsilon_t$ (-2.38) (6.87)	8.02 (0.627)	7815
Indice de producción industria manufacturera	$(1+0.507B)(1-0.610B^2)(1+0.302B^2)(1-B)W_t = \epsilon_t$ (-3.85) (4.03) (-1.96)	5.58 (0.781)	8934
Motor, energía total	$(1+0.267B+0.296B^2)(1-B)(1-B^2)W_t = (1-0.858B^4) \epsilon_t$ (-2.0) (-2.16) (4.13)	8.33 (0.501)	2366
Motor, cemento	$(1+0.41B+0.45B^2)(1-B)W_t = 1450 + (1-0.59B^2)(1-0.74B^{10}) \epsilon_t$ (-3.4) (3.4) (15.2) (4.5) (5.7)	5.66 (0.685)	5445

Los resultados de la prueba de compatibilidad se muestran en el Cuadro 5. La existencia de compatibilidad es rechazada a un nivel de significancia del 5% en el caso de las

¹⁴ Véase nota de pie de página No. 13.

variables indicadoras: Energía para usos industriales (Energía I) y Producción de Acero. Este hecho hace que sean excluidas del conjunto de variables indicadoras.

Los mayores niveles de compatibilidad, reflejados en los "P-Value", son alcanzados por las variables: Motor, Cemento y las combinaciones (Motor, Cemento) y (Motor, Energía Total).

CUADRO 5

Prueba de compatibilidad

Serie	Estadística (k)	P-value *
Energía industrial	33.78	0.0002
Motor	3.82	0.955
Cemento	10.06	0.435
Energía total	12.97	0.225
Acero	17.77	0.049
Indice producción industria de alimentos	14.75	0.141
Indice de producción industria manufacturera sin trilla de café	14.64	0.146
Indice de producción industria manufacturera	11.76	0.301
Motor, energía total	9.00	0.437
Motor, cemento	2.46	0.982

Una vez depurado el conjunto de variables indicadoras mediante el reescalamiento y la prueba de compatibilidad, se procede a obtener estimaciones de la serie trimestral del PIB basadas en cada una de las variables indicadoras. Los resultados dados en el Cuadro 6 indican que estas estimaciones son de carácter preliminar puesto que las estadísticas Ljung-Box, a un nivel de significancia del 5%, sobre los residuales $\{a_t\}$ ¹⁵ rechazan el comportamiento de estas como series ruido blanco.

¹⁵ Definidos en la sección 2.4.1.

Debido al carácter preliminar de las estimaciones referidas anteriormente se hacen necesarias unas segundas estimaciones, que, de acuerdo con la metodología, se conforman como estimaciones finales del PIB trimestralizado.

CUADRO 6
Chequeo de ruido blanco sobre los residuos $\{a_t\}$

Serie a_t	Rezago de orden 6		Rezago de orden 12	
	Ljung-Box	P-value	Ljung-Box	P-value
Motor	47.53	0.000	61.87	0.000
Cemento	78.04	0.000	83.74	0.000
Energía total	65.22	0.000	72.21	0.000
Índice producción industria de alimentos	45.42	0.000	49.28	0.000
Índice producción industria manufacturera sin trilla de café	67.83	0.000	99.72	0.000
Índice de producción industria manufacturera	64.73	0.000	85.43	0.000
Motor, energía total	77.40	0.000	86.28	0.000
Motor, cemento	56.73	0.000	68.84	0.000

La obtención de las estimaciones finales dependen de una nueva matriz ψ, ψ^* , la cual se construye con base en los coeficientes de los modelos ARIMA estimados sobre \hat{z}_t ; dichos modelos son presentados en el Cuadro 7.

Las estimaciones finales del PIB trimestralizado, de acuerdo con el grupo de series que presenta el mayor P-Value y la realizada por el Departamento Nacional de Planeación¹⁶ son presentadas en el Cuadro 8 y el Gráfico 1. Cabe señalar que otras estimaciones fueron consultadas, sin embargo, no son consideradas en la comparación, dado que su período es diferente del analizado en este trabajo. La estimación del PIB trimestral realizada por Garnica y Ortiz¹⁷, a pesar de que su período coincide con el nuestro, tampoco puede ser utilizada debido a que corresponde a una serie desestacionalizada.

¹⁶ Véanse Valderrama (1988) y Carrizosa y Botero (1984).

¹⁷ Véanse Garnica y Ortiz (1991).

CUADRO 7

Modelos ARIMA sobre la variable \hat{Z}_t

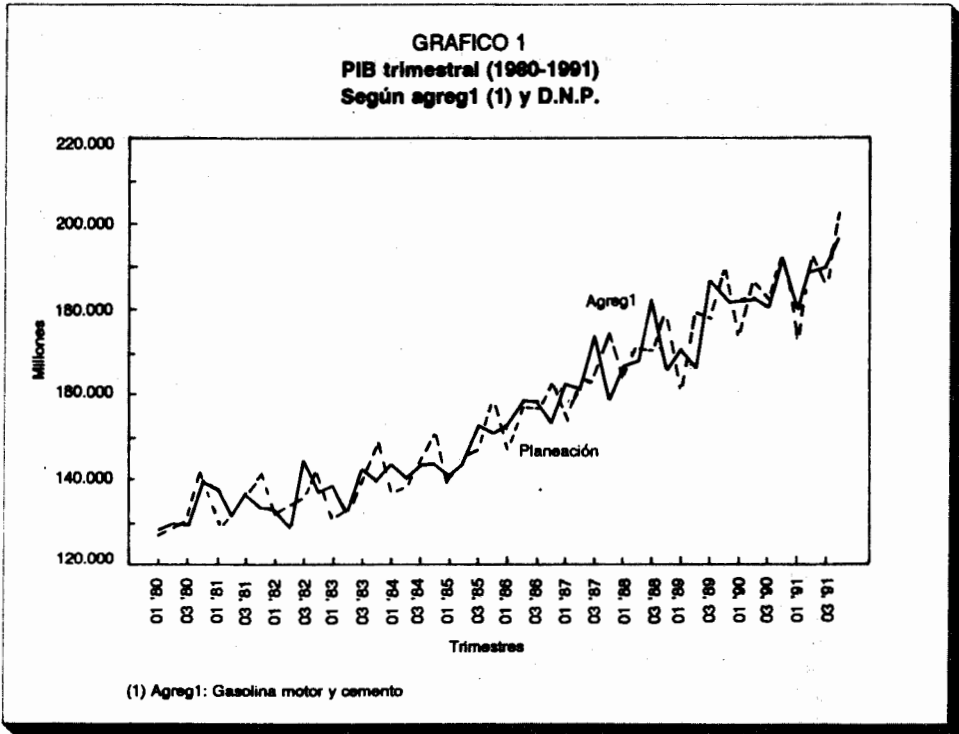
Serie	Modelo (Estadísticas t)	Ljung-Box (p-value)	STD del error
Motor	$(1-B)\hat{Z}_t = (1+0.918B)(1+0.512B^2)\epsilon_t$ (-13.5) (-3.91)	7.74 (0.654)	1418
Cemento	$(1-0.759B)(1+0.486B^2)(1-B)\hat{Z}_t = (1+0.596B)\epsilon_t$ (6.52) (-3.29) (-4.35)	6.98 (0.639)	838
Energía total	$(1-0.97B+0.30B^2)(1-0.53B^2)(1-B)\hat{Z}_t =$ (8.4) (-2.7) (3.7) $(1+0.33B+0.30B^2)(1-0.37B^2)\epsilon_t$ (-2.0) (-2.0) (2.1)	6.99 (0.322)	330
Indice producción industria de alimentos	$(1-0.33B-0.56B^2+0.44B^3)(1+0.65B^2)(1-B)\hat{Z}_t = \epsilon_t$ (2.7) (4.5) (-3.5)	5.87 (-4.9)	2259 (0.662)
Indice de producción industria manufacturera sin trilla de café	$(1-0.64B+0.36B^2)(1-B)\hat{Z}_t = (1+0.39B^2)\epsilon_t$ (6.0) (-3.0) (-2.4)	2.53 (0.980)	1934
Indice producción industria manufacturera	$(1-0.759B+0.463B^2)(1-B)\hat{Z}_t = (1-0.338B^2)\epsilon_t$ (7.55) (-4.51) (1.90)	7.97 (0.538)	1954
Motor, energía total	$(1-0.35B+0.56B^2)(1+0.36B^2)(1-B)(1-B^2)\hat{Z}_t = (1-0.58B^2)\epsilon_t$ (2.75) (-4.37) (-2.21) (4.04)	9.90 (0.272)	787
Motor, cemento	$(1-0.888B+0.296B^2)(1-B)\hat{Z}_t = (1-0.572B^2)(1-0.652B^2)\epsilon_t$ (8.31) (-2.61) (3.87) (4.32)	7.30 (0.504)	608

CUADRO 8

Estimación final del PIB trimestralizado

Fecha	Método presentado*	Planeación
80.01	127,984	126,408
80.02	129,973	128,476
80.03	129,013	130,797
80.04	138,792	140,084
81.01	137,346	130,419
81.02	130,877	130,493
81.03	136,331	135,294
81.04	133,180	141,532
82.01	132,870	131,686
82.02	128,885	133,988
82.03	144,312	135,685
82.04	136,767	141,479
83.01	138,532	130,224
83.02	131,902	133,426
83.03	142,012	139,384
83.04	138,932	148,346
84.01	143,454	136,476
84.02	140,046	138,407
84.03	143,064	144,025
84.04	143,289	150,947
85.01	140,524	138,456
85.02	144,114	144,740
85.03	152,385	146,813
85.04	150,536	157,553
86.01	152,713	146,063
86.02	158,180	156,745
86.03	158,182	156,542
86.04	152,704	162,430
87.01	162,343	155,067
87.02	160,806	163,343
87.03	173,967	162,701
87.04	158,047	174,056
88.01	166,618	163,195
88.02	167,418	171,179
88.03	182,551	169,478
88.04	165,203	177,924
89.01	170,672	160,030
89.02	165,983	178,712
89.03	186,827	177,330
89.04	181,584	188,960
90.01	181,410	172,972
90.02	182,574	186,659
90.03	179,962	182,210
90.04	191,502	192,409
91.01	178,705	172,645
91.02	188,811	192,279
91.03	189,272	184,536
91.04	196,310	201,786

* Variables indicadoras: Motor y cemento.



El Cuadro 9 presenta las estadísticas de comparación MAPE y RMSPE entre las dos estimaciones presentadas en el Cuadro 8.

Donde:

$$MAPE = 100 * \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} \frac{|(X_i - Y_i)|}{Y_i}$$

$$RMSPE = 100 * \sqrt{\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} \frac{(X_i - Y_i)^2}{Y_i^2}}$$

Estas dos estadísticas pueden interpretarse como la diferencia porcentual promedio entre las series estimadas comparadas.

CUADRO 9

Comparación entre estimadores alternativos *

Serie (X)	Método presentado (Y)	
	MAPE	RMSPE
D. N. P.	3.46	4.23

* Véanse Pindyck y Rubinfeld (1980).

V Conclusiones

La metodología de desagregación de series de tiempo se presenta como óptima en la estimación de series desagregadas no observadas, en la medida en que, primero, permite construir una prueba de compatibilidad entre la variable que se desagrega y las variables que han sido seleccionadas como indicadoras bajo criterios económicos; segundo, impone la dinámica de la serie (o grupo de series) indicadora sobre la variable que se desagrega y, tercero, produce estimadores estadísticamente eficientes.

Las bondades anteriormente señaladas justifican el uso de esta metodología en la construcción de estimaciones desagregadas de series que están disponibles sólo de manera agregada.

Bibliografía

- Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1976). *Times Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco: Holden-Day.
- Brockwell, P. J. and Davis, R. D. (1990). *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, Second Edition.
- Carrizosa, M. y Botero, G. (1984). "Trimestralización del Producto Interno Bruto en Colombia", *Coyuntura Económica*, Vol. XIV, No. 4.
- Dickey, D. and Fuller, W. (1981). "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Econometrica*, July.
- Engle, R. and Granger, C.W.J. (1987). "Co-integration and Error Correction: Representation, estimation and Testing", *Econometrica*, March.
- Garnica, M. y Ortiz, O. (1991). "Estimación de una Serie Trimestral del Producto Interno Bruto de Colombia", Trabajo de Grado. Universidad Javeriana, Departamento de Economía.
- Guerrero, V. (1990). "Temporal Disaggregation of Time Series: An ARIMA-based Approach", *International Statistical Review*, 58, 1. pp. 29-46.
- Melo, F., Misas, M. y Oliveros, H. (1991). "Seminario Económico Sobre Raíces Unitarias". Mimeo, Departamento de Investigaciones Económicas, Banco de la República.
- Perron, P. (1989). "The Great Crash, The Oil Price Shock and The Unit Root Hypothesis", *Econometrica*, Vol. 57, No. 6, November.
- Pindyck, R. y Rubinfeld, D. (1980). *Modelos Económicos*, Labor Universitaria, Primera Edición.
- Valderrama, F.M. (1988). "Metodología de Cálculo, Análisis y Aplicaciones de las Series del Producto Interno Bruto Trimestral". *Revista de Planeación y Desarrollo*.