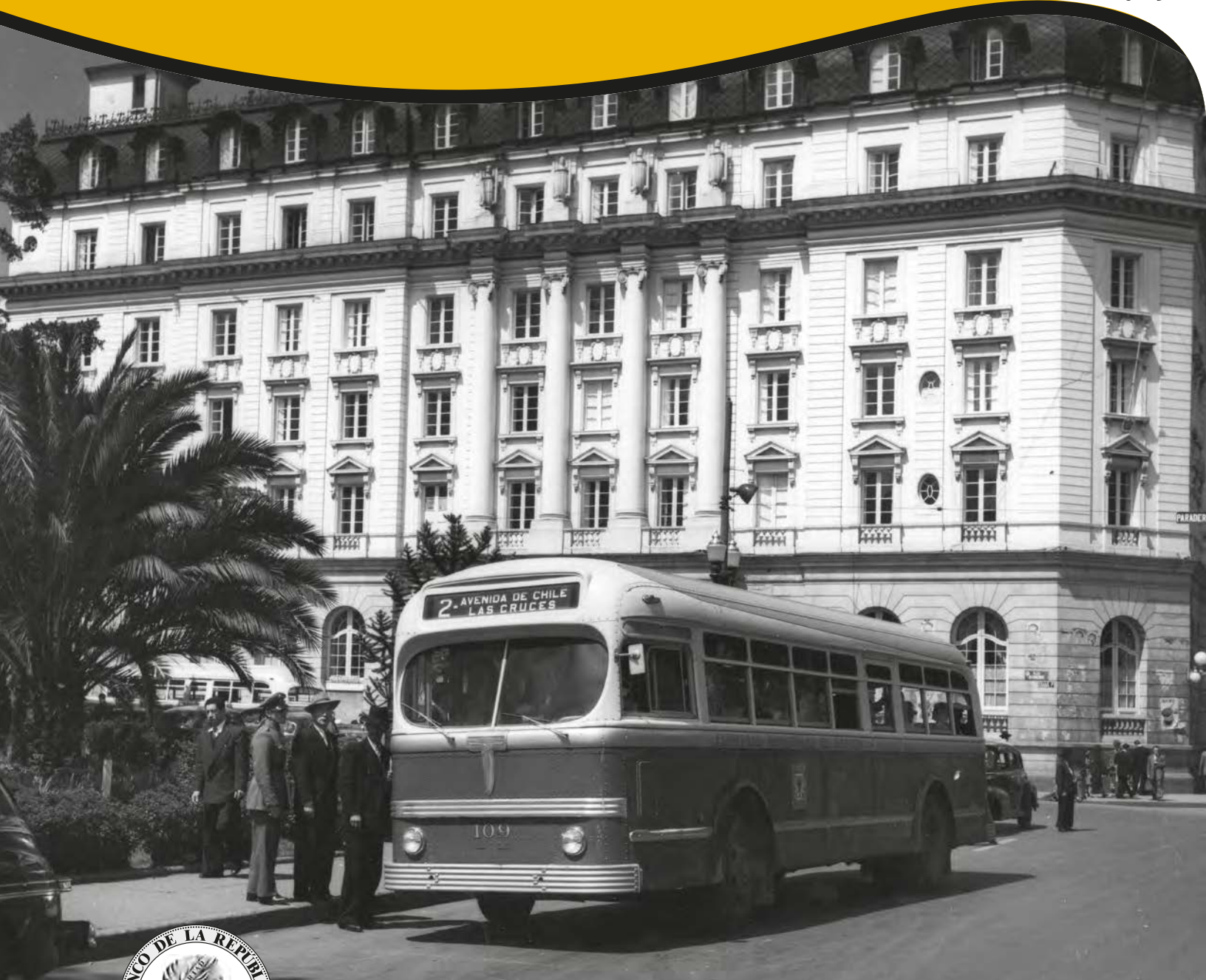


Borradores de ECONOMÍA

Probabilidad de incumplimiento de
entidades financieras colombianas:
una aproximación estructural

Por: Wilmar Cabrera-Rodríguez
Santiago Segovia-Baquero
Juan Sebastián Mariño-Montaña
Eduardo Yanquen

Núm. 1097
2019



Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia

Probabilidad de incumplimiento de entidades financieras colombianas: una aproximación estructural

Wilmar Cabrera-Rodríguez* Santiago Segovia-Baquero†
Juan Sebastián Mariño-Montaña‡ Eduardo Yanquen§

Las opiniones contenidas en el presente documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

Resumen

En este documento se evalúa cuál sería la probabilidad de incumplimiento de cinco entidades financieras colombianas a partir de la modelación estructural de su balance. La especificación propuesta, en la cual la probabilidad de incumplimiento se determina de manera endógena, muestra un mejor nivel de ajuste con respecto a la versión clásica del modelo de [Merton \(1974\)](#), el cual se usa como referencia. El modelo reduce algunas de las limitaciones que se encuentran en los modelos que se han usado tradicionalmente para evaluar la probabilidad de incumplimiento, y permite un mejor entendimiento de la estructura de balance de las entidades financieras y la forma en la que estas actúan en situaciones de estrés.

Palabras clave: Probabilidad de incumplimiento; Modelos estructurales; Riesgo de crédito.

Códigos JEL: G21; G17; G33.

*Banco de la República; wcabrero@banrep.gov.co

†Banco de la República; ssegovba@banrep.gov.co

‡Banco de la República; jmarinmo@banrep.gov.co

§Banco de la República; eyanqubr@banrep.gov.co

Probability of Default of Colombian Financial Institutions: A Structural Approach

Wilmar Cabrera-Rodríguez* Santiago Segovia-Baquero†
Juan Sebastián Mariño-Montaña‡ Eduardo Yanquen§

The opinions contained in this document are the sole responsibility of the authors and do not commit Banco de la República or its Board of Directors.

Abstract

This paper evaluates which would be the probability of default of five colombian financial institutions using a structural approximation to model their balance sheet. The proposed specification, in which the default probability is determined endogenously, shows a better fit with respect to Merton's classical model, which was used as benchmark. The model reduces some of the limitations found in the models that have been used traditionally to evaluate the probability of default, and allows a better understanding of the balance sheet structure of the financial institutions and the way they face stress situations.

Keywords: Probability of default; Structural models; Credit Risk.

JEL Classification: G21; G17; G33.

*Banco de la República; wcabrero@banrep.gov.co

†Banco de la República; ssegovba@banrep.gov.co

‡Banco de la República; jmarinmo@banrep.gov.co

§Banco de la República; eyanqubr@banrep.gov.co

1 Introducción

Las autoridades encargadas de regular y supervisar el sistema financiero buscan preservar la estabilidad financiera, situación que puede ser entendida como aquella en la cual el sistema financiero en su conjunto (establecimientos, mercados e infraestructuras) funciona de manera adecuada y cuenta con cierto grado de resiliencia para absorber, disipar y mitigar de manera autónoma la materialización de los riesgos que puedan surgir como resultado de choques o eventos adversos. En este sentido, la estabilidad financiera puede verse afectada por el comportamiento de instituciones que, en una situación extrema, colapsen e incumplan en el pago oportuno de sus obligaciones, generando así fallas en la intermediación del crédito y el correcto funcionamiento del sistema financiero.

Si bien los casos de quiebras son relativamente escasos, la naturaleza de estos eventos, i.e. baja probabilidad y alto impacto, amerita realizar un monitoreo constante de la evolución de la probabilidad de incumplimiento de las instituciones financieras, la cual dependerá en gran medida de su estructura de balance. En términos generales, existen dos tipos de aproximaciones para determinar dicha probabilidad: modelos de forma reducida y modelos estructurales, donde estos últimos modelan el balance de una firma a partir de la relación entre activos, pasivos y patrimonio.

El trabajo seminal de [Merton \(1974, 1977\)](#), el cual amplía la teoría de valoración de opciones desarrollada por [Black and Scholes \(1973\)](#), provee el marco conceptual inicial de los modelos estructurales; sin embargo, al ser la aproximación más sencilla se fundamenta en una serie de supuestos bastante restrictivos. En particular, se asume que (i) no existen fricciones en los mercados financieros; (ii) no hay costos asociados al proceso de quiebra; (iii) la decisión de endeudamiento no considera el beneficio tributario que puede tener emitir bonos o acciones; y (iv) la decisión de incumplir las obligaciones es exógena y ocurre al final del horizonte de análisis del ejercicio cuando el valor de mercado de los activos no es suficiente para respaldar la deuda (i.e. la totalidad del pasivo).

Siguiendo lo propuesto por [Leland \(1994\)](#), en este documento se presenta un modelo que incorpora soluciones a varias de las limitaciones previamente mencionadas y evalúa cuál sería la probabilidad de incumplimiento de un conjunto de entidades financieras que emiten acciones en el mercado local, a partir de la decisión óptima de estas entidades para definir su estructura de balance y la selección de manera endógena de un umbral sobre los ingresos que determina los escenarios en los cuales la firma decide incumplir en sus obligaciones, teniendo en consideración la estructura de balance y el costo de entrar en bancarrota. Los resultados indican, por un lado, un desempeño superior, en términos de ajuste de las variables del balance que se consideran, al emplear el modelo evaluado con respecto a la versión clásica de Merton, y, por otro lado, una baja probabilidad de incumplimiento al analizar indicadores de iliquidez para las firmas analizadas. Adicionalmente,

al estimar la probabilidad de incumplimiento usando medidas de apalancamiento, similares a la relación de solvencia, se encuentra que esta es superior a la calculada a partir de indicadores de iliquidez, y reacciona a los eventos de vulnerabilidad en la economía.

El remanente del presente documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta la revisión de literatura, donde se exponen los tres tipos de modelos comúnmente empleados para la determinación de probabilidad de incumplimiento. Posteriormente, en la sección 3 se presenta el modelo y en la sección 4 los resultados del mismo. Finalmente, en la quinta sección se exponen las consideraciones finales.

2 Revisión de Literatura

La probabilidad de incumplimiento de las empresas es un tema relevante por la importancia que tiene para el mercado, y para los inversionistas en general, saber si una empresa va a ser capaz de cumplir con las obligaciones que tiene con sus acreedores en el futuro cercano, determinando de esta manera si es provechoso realizar inversiones en activos que dependen directamente del valor intrínseco de la empresa, tales como bonos y acciones. Además, el análisis de esta información en conjunto podría permitir conocer la ocurrencia de eventos de carácter sistémico si se observan incrementos generalizados en la probabilidad de incumplimiento de un conjunto de firmas.

Los primeros modelos que estiman la probabilidad de incumplimiento intentaron encontrar sus determinantes de forma exógena. Esto se expone en trabajos como los de [Merton \(1974\)](#) y [Moody's \(2004\)](#). El primero trata de explicar las variaciones en los precios de los bonos de las entidades a través de cambios en su probabilidad de incumplimiento. Para determinar esta probabilidad de incumplimiento construye un modelo con los siguientes supuestos: i) no existen costos de transacción asociados a la emisión de deuda; ii) hay un número de inversionistas lo suficientemente grande que pueden comprar o vender activos a voluntad; iii) existe una misma tasa de interés tanto para prestar, como para pedir prestado y iv) se cumple el teorema de Modigliani-Miller¹. En este modelo el valor de una acción se describe a través de una ecuación diferencial estocástica que sigue un proceso de Gauss-Wiener convencional, en el que el valor se encuentra determinado por la diferencia entre el retorno esperado de la acción y el retorno efectivo de la acción, y su varianza.

Otro modelo que incluye la probabilidad de incumplimiento de forma exógena es el de [Moody's \(2004\)](#) el cual presenta la metodología que se usa para determinar el modelo de riesgo de incum-

¹ El teorema Modigliani-Miller afirma que el valor de la firma es independiente de la proporción de patrimonio y deuda con la que fondea sus operaciones.

plimiento de Moody's. El modelo tiene como objetivo proveer una valoración del riesgo de crédito de empresas privadas que les permita a sus usuarios tomar mejores decisiones de inversión, otorgamiento de créditos, manejo de portafolios, entre otros. Este modelo fue construido pensando en integrarse a modelos de riesgo de crédito de compañías que otorgan créditos, teniendo en cuenta los avances más recientes en términos de regulación.

El modelo de Moody's se diseñó con base en la metodología de dos modelos anteriores: Moody's Risk Calc v1.0 y KMV Private Firm Model. El primero es una versión más reciente y robusta del modelo en cuestión, cuya principal fortaleza es usar datos de balance para determinar el riesgo de crédito de las firmas privadas. Por otra parte, el segundo modelo usa una metodología de distancia al incumplimiento (basada en el modelo de [Merton \(1974\)](#)) que determina a través de datos de mercado cual es el riesgo asociado a una firma en particular. Esta estructura le permite capturar información acerca del riesgo asociado a una compañía, adicional a la que se podría obtener de sus hojas de balance. Además, este modelo cuenta con consideraciones respecto a los últimos acuerdos alcanzados en Basilea para firmas financieras, al incorporar factores que permiten determinar cuál sería la afectación de una firma ante la materialización de un evento de riesgo sistémico y cómo este podría impactar el comportamiento de su cartera.

Para hacer la estimación del modelo se recopilan variables provenientes de los datos de balance tales como rentabilidad, apalancamiento, cubrimiento de la deuda, liquidez, y tamaño, entre otras. A partir de estas variables se construyen modelos que cuentan con la siguiente forma funcional:

$$PD = F \left(\Phi \left(\sum_{i=1}^N \beta_i T_i(x_i) + \sum_{j=1}^K \gamma_j I_j \right) \right)$$

Donde PD representa la probabilidad de incumplimiento, x_i representa las razones calculadas a partir de los estados financieros, I_j son las clasificaciones para cada una de las industrias, β y γ son coeficientes estimados, Φ es la distribución normal acumulada y F y T son transformaciones no paramétricas.

Por otro lado, se usan variables de mercado de la compañía para determinar cuál es su nivel de riesgo. Una forma de hacerlo es a través del valor de mercado de la compañía; sin embargo, esta es información que no se encuentra disponible para un amplio conjunto de firmas que no cotizan en bolsa. La solución que se adoptó fue diseñar un modelo con una medida de distancia de incumplimiento e incluir este indicador en los análisis de firmas privadas. Para ello, se toma la información de distancia al incumplimiento para un conjunto limitado de firmas en cada una de las industrias que se analizan dentro del modelo, se promedian y se aplica este promedio a

aquellas que pertenecen a la misma industria y no cuentan con la información necesaria. [Moody's \(2004\)](#) encuentra que la incorporación de esta variable al modelo aumenta el poder predictivo del mismo más que cuando se incorporan ciertas variables macroeconómicas cuya relación con el comportamiento de incumplimiento ha sido heterogénea durante los periodos de crisis con los que se cuenta en la muestra, si bien a priori suele pensarse que podrían dar indicios del comportamiento de pago de las firmas.

Además, se encuentran los modelos de probabilidad endógena de incumplimiento, los cuales buscan describir la probabilidad de incumplimiento de la empresa a través de sus estados financieros, sus decisiones de optimización del valor de la firma y la búsqueda de un umbral sobre los ingresos de la firma que determina los periodos en los cuales se decide incumplir con las obligaciones. Al respecto se pueden encontrar trabajos como los de [Leland \(1994\)](#) y [Goldstein et al. \(2001\)](#).

La propuesta de Leland incorpora un modelo según el cual el valor de una empresa se encuentra determinado por su flujo esperado de ingresos, los pagos de pasivos, los beneficios tributarios sobre los pagos de intereses, el costo de bancarrota y la opción que tiene la firma de incumplir sus obligaciones. Los detalles de este modelo se presentan en la sección 3.

Por último, se encuentran los modelos de intensity default, como el que se expone en [Duffie and Lando \(2001\)](#). Bajo estas aproximaciones se busca modelar los eventos de incumplimiento de una manera estadística sin incluir argumentos financieros, ya que las firmas no toman decisiones de inversión o de financiamiento.

Los modelos expuestos en esta sección constituyen aproximaciones puramente teóricas. Los trabajos que evalúan empíricamente los distintos métodos son escasos y en general no abordan el problema con un enfoque estructural. Algunos ejemplos son [Tarashev \(2005\)](#), [Switzer and Wang \(2013\)](#), [Altman et al. \(2010\)](#), [Bharath and Shumway \(2008\)](#) y [Kato and Hagendorff \(2010\)](#). En este sentido, en este documento se adapta el modelo estructural de [Goldstein et al. \(2001\)](#) a los datos de balance y mercado de las firmas del sector financiero que cotizan en el mercado de valores de Colombia.

2.1 El Caso Colombiano

En cuanto a la literatura relacionada con la probabilidad de incumplimiento para entidades financieras colombianas, son escasos los documentos encontrados. Los primeros investigadores en indagar sobre este tema fueron [Souto and Abrego \(2008\)](#), quienes evaluaron la influencia de variables bancarias y macroeconómicas sobre las probabilidades de incumplimiento de cinco bancos (dos locales y tres subsidiarias extranjeras). En este documento no se calcularon dichas probabilidades,

las cuales fueron tomadas de la base de datos KMV de Moody's Ratings.

Las regresiones *stepwise* estimadas en este documento muestran que los indicadores de actividad económica y de condiciones financieras tienen un efecto importante en las distribuciones de incumplimiento esperado, aunque este efecto es heterogéneo entre las entidades financieras analizadas. A nivel agregado se encontró que una valorización en el mercado accionario local disminuye la probabilidad de incumplimiento, al igual que un mayor crecimiento económico, una menor volatilidad del mercado y una desvalorización del mercado accionario estadounidense.

Estos resultados son consistentes con el modelo de Merton, en el sentido en que mayores capitalizaciones bursátiles y menor volatilidad generan endógenamente menor vulnerabilidad. Por otro lado, una desvalorización en mercados desarrollados podría significar un incremento en los flujos de capital de portafolio entrantes a la economía colombiana, lo que implicaría *ceteris paribus* una valorización en el mercado local.

Un segundo documento relacionado es el de [Capera et al. \(2013\)](#). En él se estudia la probabilidad de incumplimiento de 4 instituciones financieras colombianas desde una perspectiva de riesgo sistémico, en la que el gobierno tiene una opción implícita de rescate en un evento de incumplimiento. Para ello los autores calculan el modelo de Merton estándar usando los datos de capitalización bursátil de las entidades, la volatilidad de los retornos accionarios y la tasa de los depósitos a tres meses como tasa libre de riesgo. En este documento se calcula la probabilidad clásica de Merton, y el indicador de probabilidad teórica del modelo KMV de Moody's.

Los resultados de los modelos individuales muestran que la probabilidad teórica a partir del modelo KMV es siempre superior a la calculada en el modelo clásico. Se observa de igual manera que las probabilidades más altas se registraron entre los años 2001 y 2002, pocos años después de la crisis hipotecaria de 1999. Adicionalmente, se registran momentos de relativo estrés en 2006 y 2008-2009, momentos en los que efectivamente se registraron desbalances en los mercados financieros locales.

Adicionalmente, los autores realizaron un modelo de Merton agregado, en el cual el gobierno asume el diferencial entre la deuda de las entidades y su activo a través de una opción put. Esta aproximación permitió observar la contribución de cada uno de los bancos, y calcular una pérdida dado el incumplimiento a partir de las probabilidades estándar y teóricas. Por último, se construyeron cópulas a través de simulaciones de Monte-Carlo en las que se modeló la dependencia de las colas de las distribuciones de las opciones put de los cinco bancos analizados bajo probabilidades de incumplimiento estándar y basadas en el modelo KMV. A las distribuciones resultantes se le calculó el valor en riesgo al 1%, y el indicador de *expected shortfall*.

Los resultados de los indicadores de riesgo sistémico permiten observar que la pérdida que eventualmente tendría que asumir el gobierno colombiano ante un evento de cola en la que los cuatro bancos analizados entran en incumplimiento ronda un billón de pesos. De igual manera se observa que uno de los cuatro bancos representa más del 90 % de las pérdidas esperadas para la metodología de *VaR* y de *expected shortfall*.

Por último, en el documento de León (2012) se realizó una aproximación al modelo de Merton bajo restricciones de información. Dado que unas pocas entidades financieras en Colombia cotizan en bolsa, y que no se cuenta con series de tiempo lo suficientemente largas para realizar ejercicios generalizados para todo el sistema financiero colombiano, el autor propone la utilización de datos del mercado monetario para el cálculo de probabilidad de incumplimiento. Específicamente, se utiliza el spread entre la tasa libre riesgo y las tasas cobradas en operaciones del mercado monetario como variable proxy. Adicionalmente, se utiliza el valor reportado en los balances como el valor de las firmas.

Es importante resaltar que la propuesta de León (2012) tiene dos sesgos: uno derivado del hecho de que el valor en libros tiende a subestimar el valor de mercado de las firmas, y el hecho de que los spreads usados como proxy para el riesgo financiero contienen factores que no necesariamente están asociados al riesgo de crédito de la entidad. Los resultados muestran que un mayor apalancamiento está asociado con mayores probabilidades de incumplimiento y que, en promedio, es más baja para los bancos, seguidos de las comisionistas de bolsa y los fondos de inversión.

En comparación con los otros documentos aplicados para establecimientos colombianos, las probabilidades aquí encontradas son relativamente altas: varían entre 22 % para los bancos y 27 % para los fondos de inversión. Esto podría desprenderse del hecho que se incorporaron algunas firmas con menor participación en el mercado, mientras que las entidades que cotizan en bolsa tienden a tener datos más robustos y estables.

En la literatura local sobre modelos de probabilidad de incumplimiento, no se encontraron documentos que emplearan un modelo estructural diferente a la aproximación de Merton. En ese sentido, el presente trabajo aporta al estado del arte de esta temática al utilizar un modelo estructural que estima la decisión de incumplimiento de manera endógena, y calcula estos parámetros de incumplimiento a través de datos empíricos.

3 Metodología

Siguiendo a [Goldstein et al. \(2001\)](#) se modela una estructura simplificada del balance de los establecimientos de crédito que emiten acciones en el mercado local. Para este fin, se emplea la hipótesis base de valoración de activos que relaciona el precio de un activo con el flujo de pagos que este genera y, por simplicidad y manejo matemático, se asume que el balance depende de la dinámica de los ingresos, así como de un conjunto de condiciones que se cumplen cuando una entidad decide entrar en bancarrota.

El modelo se plantea en términos continuos para ofrecer una solución analítica que brinda intuición y permite explicar la dinámica de cada uno de los componentes de este balance simplificado. Este análisis, a su vez, permite mejorar ciertas debilidades del modelo estándar de probabilidad de incumplimiento exógena. En particular: i) considera que entrar en bancarrota es costoso, ii) incorpora el pago de impuesto que realizan las entidades, iii) si bien asume una estructura simplificada para el pasivo de la entidad, la estructura que se utiliza representa un avance al supuesto que toda la deuda es cero cupón a un plazo específico, y iv) identifica un umbral para entrar en estado de bancarrota de manera endógena dada la estructura de balance de la entidad y el costo de ejecutar la opción de entrar en esta situación.

Se parte de la identidad contable:

$$V_t = E_t + D_t$$

Donde, V_t es el activo, E_t el patrimonio y D_t los pasivos. Estas variables representan valores de mercado y el subíndice indica que varían en el tiempo. Respecto a los pasivos, se asume por simplicidad que la estructura de pagos es una perpetuidad con un pago constante y por tanto el valor de mercado de este rubro es:

$$D_t = \tilde{E}_t \left[\int_t^\infty C \exp^{-r(s-t)} \right] \quad (1)$$

En otras palabras, el valor de mercado de los pasivos es el valor presente de los pagos futuros C . El operador \tilde{E}_t simboliza el valor esperado bajo una medida neutral al riesgo, lo cual explica que los flujos futuros se traigan a valor presente empleando la tasa libre de riesgo r , la cual se asume constante en el modelo.

Por otro lado, se asume que el valor de mercado del patrimonio es el valor presente de los ingresos de la entidad luego de pagar intereses e impuestos:

$$E_t = \tilde{E}_t \left[\int_t^\infty (1 - \tau)(Y - C) \exp^{-r(s-t)} \right] \quad (2)$$

Donde, τ es la tasa de tributación sobre los ingresos luego de pagar los intereses de la deuda C y por tanto Y representa los ingresos antes de pagar intereses y deuda. Para lograr que el modelo sea tratable, se introduce el supuesto que las ecuaciones (1) y (2) dependen de Y y que la dinámica de Y está dada por un movimiento geométrico browniano:

$$\frac{\partial Y_t}{Y_t} = \mu dt + \sigma_t d\tilde{Z}_t$$

Donde, μ es la deriva, σ la volatilidad y \tilde{Z}_t un movimiento browniano bajo una medida neutral al riesgo. Se asume entonces que los mercados no son completos y que por tanto la deriva bajo la medida neutral al riesgo no es igual a la tasa libre de riesgo.

3.1 Valoración del pasivo

El valor de mercado del pasivo está dado por:

$$D_t(Y) = \tilde{E}_t \left[\int_t^\infty C \exp^{-r(s-t)} \right]$$

Empleando una aproximación de primer orden es posible llegar a la expresión que se conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB, el procedimiento para llegar a esta expresión aparece en el Anexo A:

$$rD(Y) = C + \mu Y D_Y(Y) + \frac{\sigma^2}{2} Y^2 D_{YY}(Y) \quad (3)$$

Donde, $D_Y(Y)$ representa la primera derivada de la función $D(Y)$ con respecto a Y y $D_{YY}(Y)$ la segunda derivada. Para solucionar esta ecuación diferencial se emplea el método de prueba y error. Primero, se sugiere una solución general para el sistema:

$$D(Y) = A_0 + A_1Y + A_2Y^\gamma$$

Reemplazando esta expresión en (3), se tiene:

$$r(A_0 + A_1Y + A_2Y^\gamma) = C + \mu Y (A_1 + \gamma A_2Y^{\gamma-1}) + \frac{\sigma^2}{2}Y^2 (\gamma(\gamma - 1)A_2Y^{\gamma-2})$$

Solucionando por el método de coeficientes indeterminados, se encuentra:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{C}{r} \\ A_1 &= 0 \\ \gamma &= -\frac{1}{\sigma^2} \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (\pm) \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2r\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Utilizando los desarrollos anteriores, la ecuación de la deuda puede representarse como:

$$D(Y) = \frac{C}{r} + A_2Y^\gamma \quad (4)$$

Ahora, dado que cuando Y es lo suficientemente grande ($Y \rightarrow \infty$) no hay riesgo de incumplimiento y el valor de la deuda debe converger al de una perpetuidad ($D(Y) \rightarrow \frac{C}{r}$) se selecciona $\gamma < 0$.

Para encontrar A_2 se utiliza la noción de bancarrota y su incidencia en el valor de los pasivos. Se define bancarrota como la condición $Y \leq Y_B$, donde Y_B es un umbral de ingresos a partir del cual la entidad decide endógenamente incumplir en sus obligaciones. Para encontrar este valor, la entidad tiene en consideración que entrar en el estado de bancarrota es costoso (los activos se ajustan por un *haircut*) y que no hay vuelta atrás luego de ejecutar esta opción.

Adicionalmente, se asume que cuando la entidad incumple el valor de la deuda se ve afectado negativamente:

$$D(Y_B) = (1 - \alpha)(1 - \tau)V(Y_B)$$

Donde, α representa el costo de bancarrota y toma valores entre cero y uno. Al introducir esta condición en (4), se encuentra:

$$\begin{aligned} \frac{C}{r} + A_2 Y_B^\gamma &= (1 - \alpha)(1 - \tau)V(Y_B) \\ A_2 &= \frac{1}{Y_B^\gamma} \left[(1 - \alpha)(1 - \tau)V(Y_B) - \frac{C}{r} \right] \end{aligned}$$

El valor de la deuda es entonces:

$$D(Y) = \frac{C}{r} - \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma \left[\frac{C}{r} - (1 - \gamma)(1 - \tau)V(Y_B) \right] \quad (5)$$

Esta ecuación sugiere que el valor de la deuda se compone de:

- $\frac{C}{r}$: el valor de mercado de una perpetuidad libre de riesgo.
- $\left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma \left[\frac{C}{r} - (1 - \gamma)(1 - \tau)V(Y_B) \right]$: el valor presente de la pérdida dado incumplimiento.

3.2 Valoración del patrimonio

Se procede de forma similar a los pasivos. Se parte de la ecuación de valoración del patrimonio:

$$E_t(Y) = \tilde{E}_t \left[\int_t^\infty (1 - \tau)(Y - C) \exp^{-r(s-t)} \right]$$

Luego se deriva la ecuación de HJB:

$$rE(Y) = (1 - \tau)(Y - C) + \mu E_Y(Y) + \frac{\sigma^2}{2} E_{YY}(Y) \quad (6)$$

Ahora, al emplear un solución general como:

$$E(Y) = X_0 + X_1 Y + X_2 Y^{\gamma_2}$$

Y reemplazar esta condición en (6), el método de coeficientes indeterminados permite encontrar:

$$\begin{aligned} X_0 &= -(1 - \tau) \frac{C}{r} \\ X_1 &= \frac{1 - \tau}{r - \mu} \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{\sigma^2} \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (\pm) \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2r\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de valoración del patrimonio se puede expresar como:

$$E(Y) = (1 - \tau) \left(\frac{Y}{r - \mu} - \frac{C}{r} \right) + X_2 Y^{\gamma_2} \quad (7)$$

Al igual que con el pasivo, es necesario seleccionar $\gamma_2 < 0$ para cumplir con la condición de que cuando $Y \rightarrow \infty$ el valor del patrimonio debe ser el de una firma libre de riesgo. Con el desarrollo del modelo hasta el momento aún continúan las incógnitas X_2 y Y_B . Para solucionar estas variables, se utilizan las condiciones que se deben cumplir en el estado de bancarrota sobre el valor del patrimonio.

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \\ \frac{\partial E(Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=Y_B} &= 0 \end{aligned}$$

Empleando estas condiciones con (7) se encuentra:

$$X_2 = -\frac{(1-\tau)}{(r-\mu)\gamma_2 Y^{\gamma_2} - 1}$$

$$Y_B = \frac{\gamma_2}{(\gamma_2 - 1)} \frac{(r-\mu)}{r} C$$

La ecuación de valoración del patrimonio es entonces:

$$E(Y) = (1-\tau) \left[\frac{Y}{r-\mu} - \frac{C}{r} - \left(\frac{Y_B}{r-\mu} - \frac{C}{r} \right) \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma \right] \quad (8)$$

En palabras, el valor de la firma es determinado por:

- $(1-\tau) \left(\frac{Y}{r-\mu} - \frac{C}{r} \right)$: el valor de mercado de una firma que emite deuda libre de riesgo luego de pagar impuestos.
- $(1-\tau) \left(\frac{Y_B}{r-\mu} - \frac{C}{r} \right) \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma$: el valor de la firma que se pierde al entrar en incumplimiento.

3.3 Valoración del activo

Dada la identidad contable se tiene:

$$V(Y) = D(Y) + E(Y)$$

$$= \frac{C}{r} - \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma \left[\frac{C}{r} - (1-\gamma)(1-\tau)V(Y_B) \right] +$$

$$(1-\tau) \left[\frac{Y}{r-\mu} - \frac{C}{r} - \left(\frac{Y_B}{r-\mu} - \frac{C}{r} \right) \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma \right] \quad (9)$$

$$= (1-\tau) \frac{Y}{r-\mu} + \frac{\tau C}{r} \left(1 - \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma \right) - \alpha(1-\tau) \frac{Y_B}{(r-\mu)} \left(\frac{Y}{Y_B} \right)^\gamma$$

4 Resultados

4.1 Calibración de parámetros

Para calcular la medida de probabilidad de incumplimiento, bajo la estructura impuesta por el modelo planteado en la sección anterior, es necesario conocer todos los elementos que componen las ecuaciones (7) y (8). Las variables se pueden clasificar de esta manera en tres categorías:

Variables observables Capitalización bursátil ($E(Y)$), deuda reportada en el balance ($D(Y)$), tasa de interés de los bonos soberanos (TES) a un año (r) y tasa efectiva de tributación (τ).

Variables exógenas Costo de bancarrota de 40 % (α)²

Variables que se extraen del modelo Componente tendencial del ingreso (μ), volatilidad del ingreso (σ^2) y los pagos constantes del pasivo (C).

Dado que la estructura de pagos del pasivo de las firmas analizadas no es una perpetuidad con pagos constantes C , se busca el valor de esta variable que se ajusta al valor de la firma que se observa y que hace que este valor sea una decisión optima bajo la estructura de balance impuesta. En otras palabras, se toma el valor de la firma dado en (9) y se optimiza con respecto a C . Se asume que C toma el valor resultante de dicha optimización:

$$C = Y \frac{r}{r - \mu} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 - \gamma - \alpha \frac{1 - \tau}{\tau} \gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (10)$$

Luego, empleando las variables observables, exógenas y la calibración de C , se encuentra el valor de μ y σ^2 solucionando el sistema de ecuaciones no lineales que conforman (7) y (8).

²Dado que no se tiene una estimación de este valor en Colombia, se escogió siguiendo la aproximación propuesta en [Tarashev \(2005\)](#).

4.2 Probabilidades de incumplimiento

En este documento se evalúa la probabilidad de incumplimiento por iliquidez, que se entiende como la incapacidad de la firma de pagar sus obligaciones, y la probabilidad de incumplir con un límite sobre el patrimonio de la firma. Esta última medida se inspira en los requerimientos de capital que se exigen a las entidades financieras. Los escenarios en los cuales la firma incumple por iliquidez se entienden como aquellos en los cuales los ingresos son inferiores o iguales al umbral que ha decidido endógenamente la firma para entrar en bancarrota. Esta situación se puede expresar con la estructura del modelo de la siguiente manera:

$$Y_B \geq Y_T$$
$$Y_B \geq Y_t \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) + \sigma (\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_t) \right) \right)$$
$$-\frac{\ln \left(\frac{Y_t}{Y_B} \right) + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \geq X$$

Donde X es un proceso estocástico que sigue una distribución normal estándar y T es el tiempo en el que se debe cancelar la deuda. Ahora el cálculo de la probabilidad de incumplimiento es simplemente:

$$P(Y_T \leq Y_B) = P \left(X \leq -\frac{\ln \left(\frac{Y_t}{Y_B} \right) + (\mu - \frac{1}{2}) \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)$$
$$= N \left(-\frac{\ln \left(\frac{Y_t}{Y_B} \right) + (\mu - \frac{1}{2}) \sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \right)$$

Donde, $N(\cdot)$ es la función de distribución de la normal estándar. Por otra parte, para calcular la probabilidad de incumplimiento sobre un límite del patrimonio se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se simulan 1.000 sendas para la variable de ingresos Y .

2. Para cada una de las realizaciones de Y , se calculan los valores de patrimonio ($E(Y)$) y pasivo ($D(Y)$).
3. Se encuentran los escenarios en los cuales:

$$\frac{E(Y)}{E(Y) + D(Y)} \leq thr$$

Para $thr \in (0,09; 0,11; 0,15)$.

4. Finalmente, las probabilidades se calculan por conteo.

4.3 Ejercicio empírico

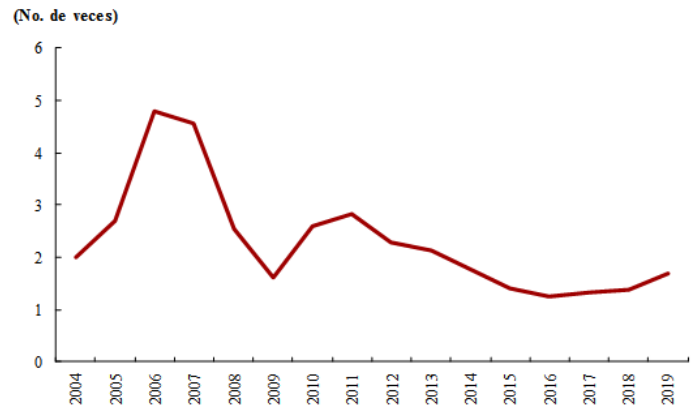
Para la aplicación del modelo se analizaron un total de cinco entidades del sistema financiero colombiano; sin embargo, con el fin de facilitar la presentación de los resultados, estos se muestran para una de las entidades dentro del cuerpo del documento y en los anexos se encuentran los de las otras entidades.

En primer lugar, se presenta la evolución de la relación entre la capitalización bursátil y el valor en libros de la firma (*price-to-book*). En general, se observa que la estimación que hace el mercado del valor de las compañías suele estar por encima de la valoración que se hace a través de sus libros de contabilidad (Gráfico 1; Anexo B).

A partir de los parámetros estimados para las entidades (Gráfico 2 y ; Anexo C) se estima tanto el patrimonio de la firma como su deuda. Dicha estimación se realiza empleando los datos del mismo período, así como los del año anterior con el fin de comprobar el ajuste prospectivo del modelo. Bajo la primera aproximación se encuentra que el ajuste del modelo es prácticamente exacto con respecto a los valores observados del patrimonio y la deuda. Cuando se realiza el segundo ejercicio, el ajuste del modelo se ve reducido debido a variaciones significativas en el *price-to-book* de la entidad (Gráfico 3; Anexo D).

Pese a que en ocasiones el ajuste del pronóstico del modelo difiere significativamente de los datos observados, para contrastar su utilidad con respecto a los modelos que asumen una distancia al incumplimiento de forma exógena, se calculó el error de pronóstico en comparación con el modelo clásico de Merton (1974) expuesto en la revisión de la literatura. En general, se puede afirmar que el modelo propuesto tiene un menor error de pronóstico y por tanto estima de mejor manera la probabilidad de incumplimiento (Cuadro 1).

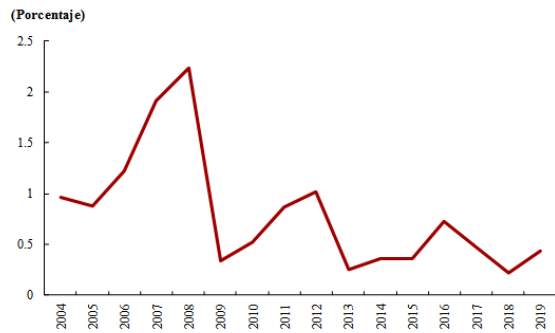
Gráfico 1: *Price-to-book* de la entidad 1



Fuente: Bloomberg y Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

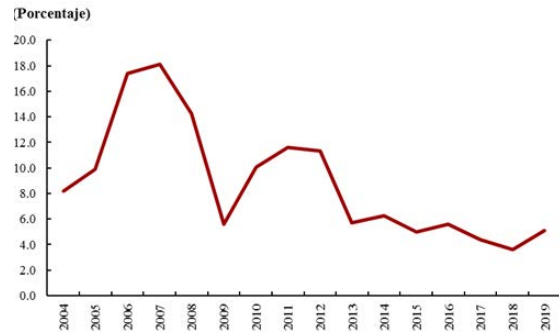
Gráfico 2: Estimación de parámetros para la entidad 1

(a) Parámetro μ



Fuente: Cálculos de los autores.

(b) Parámetro σ

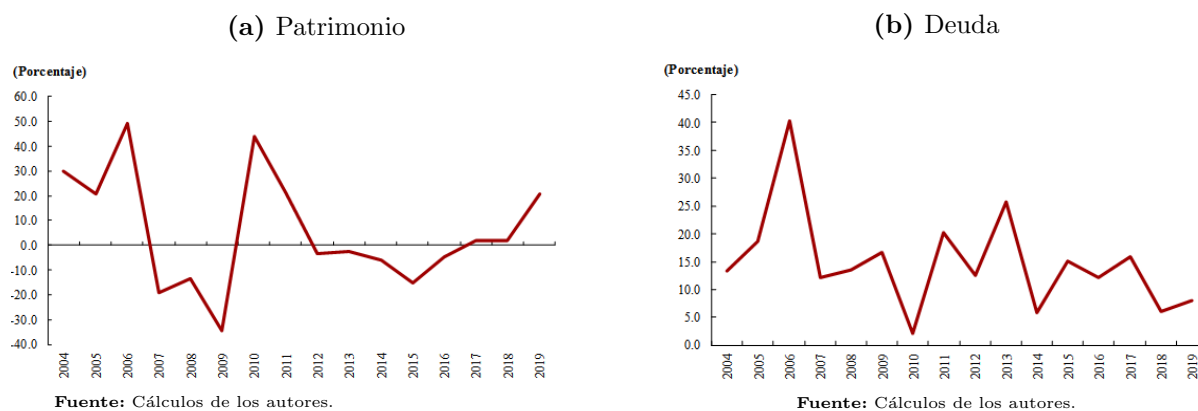


Fuente: Cálculos de los autores.

Cuadro 1: Comparación del error de pronóstico de los modelos para la entidad 1

	Modelo Propuesto	Modelo de Merton
MSE Patrimonio	3.8	4.6
MSE Deuda	10.2	10.4

Gráfico 3: Ajuste del modelo empleando datos rezagados para la entidad 1



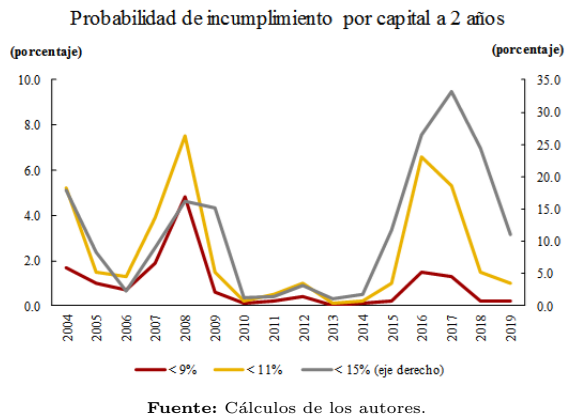
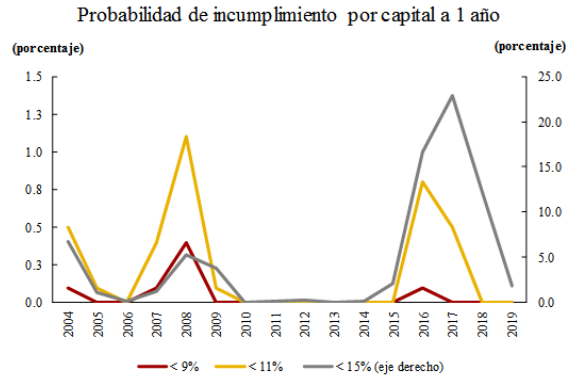
Al analizar la probabilidad asociada a iliquidez, es decir, a la situación en la cual los ingresos son inferiores al umbral que ha decidido la firma, los valores son estadísticamente iguales a cero. Además, se calculó la probabilidad asociada a una caída del patrimonio sobre activos por debajo de tres umbrales de riesgo (9 %, 11 % y 15 %). En contraste con los resultados obtenidos para la probabilidad de incumplimiento asociada a iliquidez, la probabilidad de incumplimiento por solvencia es superior y tiene una relación directa con el nivel del umbral que se evalúa. Los períodos donde se exhibe un mayor estrés para las entidades analizadas coinciden para el caso de la crisis financiera de 2008 y con el período de caída en el ingreso nacional en 2016, producto de la contracción en el precio del petróleo entre finales de 2014 e inicios de 2016 (Gráfico 4; Anexo E).

5 Conclusiones

En este documento se presentó un modelo que a partir de una metodología de barrera de default endógena evaluó cuál sería la probabilidad de incumplimiento de cinco entidades financieras colombianas. La especificación del modelo propuesto muestra un mejor nivel de ajuste con respecto a la versión clásica del modelo de Merton, el cual asume que el default se produce de manera exógena y al final del horizonte de análisis del ejercicio. Además de lo anterior, el presente modelo elimina ciertas limitaciones que se encontraron en otros documentos de la literatura, acercándose así a un mejor entendimiento de la estructura de balance de las entidades y la forma en la que estas actúan en situaciones de estrés.

Adicionalmente, es un modelo que, al combinar los análisis de finanzas corporativas y valoración de

Gráfico 4: Probabilidad de incumplimiento por solvencia para la entidad 1



activos, ofrece un conjunto de ecuaciones para entender la dinámica del activo, pasivo y patrimonio de la entidad, así como los principales elementos que determinan el valor de estas variables. Sin embargo, el ajuste del modelo empleando datos rezagados muestra la necesidad de seguir trabajando en un modelo que se asemeje más a la estructura del balance de los bancos y no a entidades del sector real. En particular, es necesario trabajar en una estructura del pasivo más flexible, en la desagregación del activo en sus diferentes componentes, en la dependencia del valor del balance de las firmas a variables macroeconómicas y en la consideración de los límites de solvencia en la toma de decisiones, entre otros temas a mencionar.

Referencias

- Altman, E., Fargher, N., and Kalotay, E. (2010). A simple empirical model of equity-implied probabilities of default. *The Journal of Fixed Income*, 20(3):71–85.
- Bharath, S. T. and Shumway, T. (2008). Forecasting default with the merton distance to default model. *The Review of Financial Studies*, 21(3):1339–1369.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.
- Capera, L., Gomez, E., Laverde, M., and Morales, M. (2013). Measuring systemic risk in the colombian financial system. *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, 6(3):253–279.
- Duffie, D. and Lando, D. (2001). Term structures of credit spreads with incomplete accounting information. *Econometrica*, 69(3):633–664.
- Goldstein, R., Ju, N., and Leland, H. (2001). An ebit-based model of dynamic capital structure. *The Journal of Business*, 74(4):483–512.
- Kato, P. and Hagendorff, J. (2010). Distance to default, subordinated debt, and distress indicators in the banking industry. *Accounting & Finance*, 50(4):853–870.
- Leland, H. E. (1994). Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *The Journal of Finance*, 49(4):1213–1252.
- León, C. (2012). Implied probabilities of default from colombian money market spreads: The merton model under equity market informational constraints. *Borradores de Economía*, (743).
- Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29(2):449–470.
- Merton, R. C. (1977). On the pricing of contingent claims and the modigliani-miller theorem. *Journal of Financial Economics*, 5(2):241–249.
- Moody's (2004). The moody's kmv edfTM riskcalcTM v3. 1 model.
- Souto, M. and Abrego, L. (2008). The colombian banking sector-a contingent claims analysis.
- Switzer, L. N. and Wang, J. (2013). Default risk estimation, bank credit risk, and corporate governance. *Financial Markets, Institutions & Instruments*, 22(2):91–112.
- Tarashev, N. A. (2005). An empirical evaluation of structural credit risk models.

A Anexo

El desarrollo matemático para encontrar la ecuación de Hamilito-Jacobi-Bellman (HJB) para el pasivo es:

- Se parte de la ecuación de valoración

$$\begin{aligned} D(Y_t) &= \tilde{E}_t \left[\int_t^\infty C \exp^{-r(s-t)} ds \right] \\ &= \tilde{E}_t \left[\int_t^{t+\Delta} C \exp^{-r(s-t)} ds + \int_{t+\Delta}^\infty C \exp^{-r(s-t)} ds \right] \\ &= \tilde{E}_t \left[\int_t^{t+\Delta} C \exp^{-r(s-t)} ds + D(Y_{t+\Delta}) \exp^{-r\Delta} \right] \end{aligned}$$

- Al realizar una aproximación de primer orden, se encuentra:

$$D(Y_t) = \Delta C + (1 - r\Delta)(D(Y) + D_y \partial Y + \frac{1}{2} D_{yy} \partial^2 Y)$$

- Reexpresando este resultado se encuentra la ecuación de HJB:

$$rD(Y) = C + \mu Y D_y(Y) + \frac{\sigma^2}{2} Y^2 Y D_{yy}(Y)$$

B *Price to Book*

Gráfico 5: *Price-to-book* de la entidad 2



Fuente: Bloomberg y Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

Gráfico 6: *Price-to-book* de la entidad 3



Fuente: Bloomberg y Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

Gráfico 7: *Price-to-book* de la entidad 4



Fuente: Bloomberg y Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

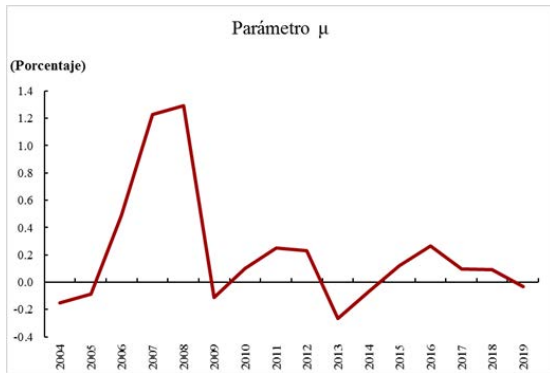
Gráfico 8: *Price-to-book* de la entidad 5



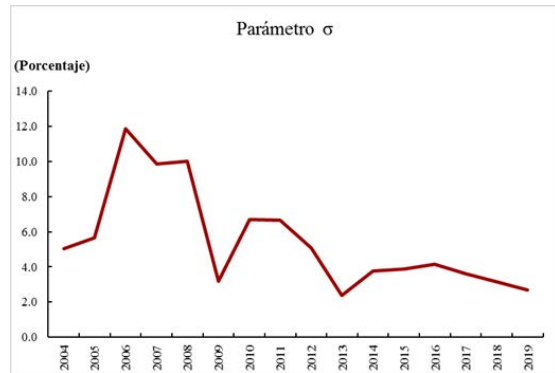
Fuente: Bloomberg y Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

C Estimación de los parámetros

Gráfico 9: Estimación de parámetros para la entidad 2

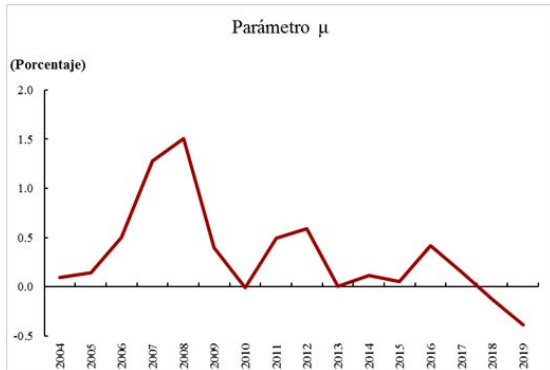


Fuente: Cálculos de los autores.

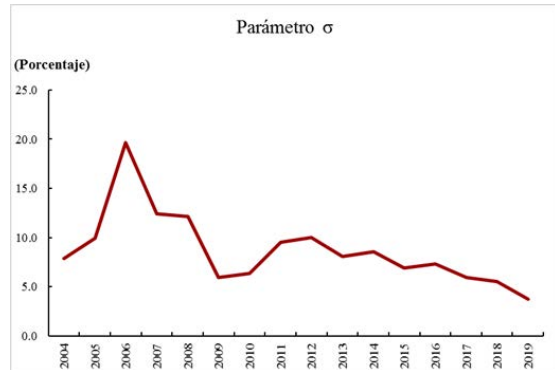


Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 10: Estimación de parámetros para la entidad 3

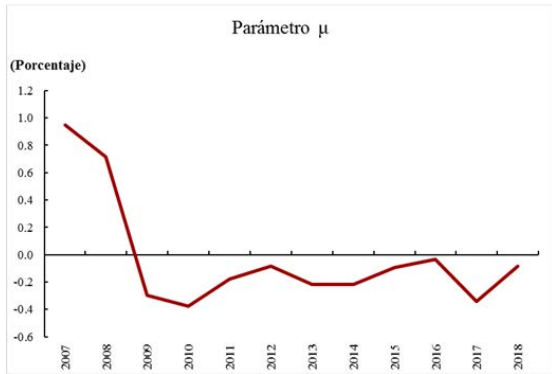


Fuente: Cálculos de los autores.

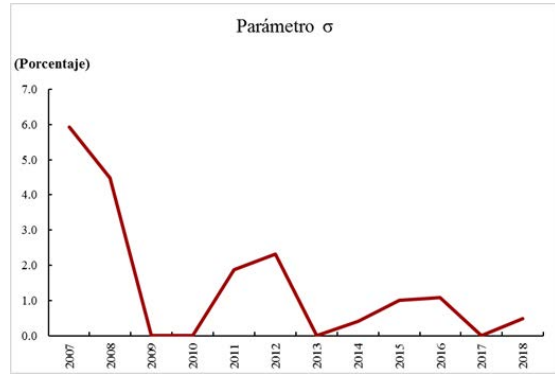


Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 11: Estimación de parámetros para la entidad 4

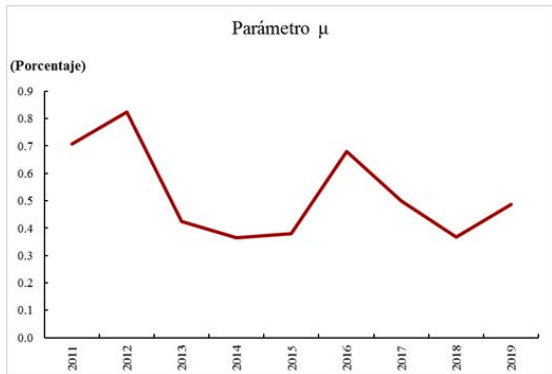


Fuente: Cálculos de los autores.

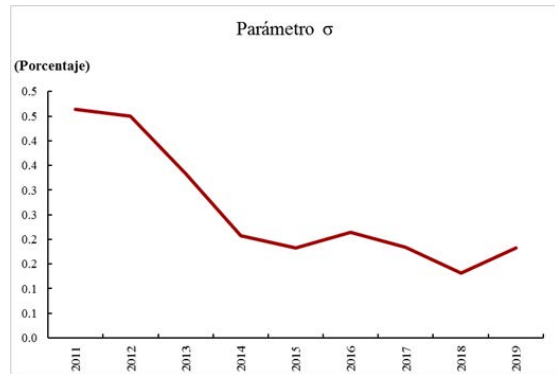


Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 12: Estimación de parámetros para la entidad 5



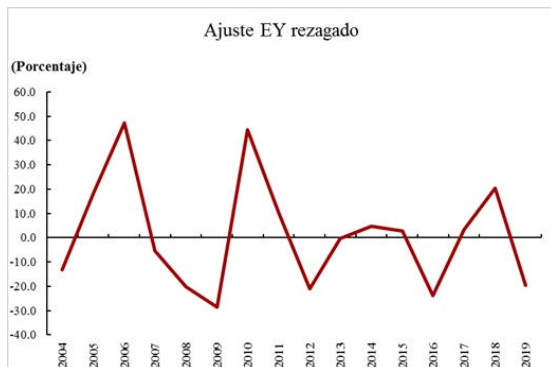
Fuente: Cálculos de los autores.



Fuente: Cálculos de los autores.

D Ajuste del modelo

Gráfico 13: Ajuste del modelo empleando datos rezagados para la entidad 2



Fuente: Cálculos de los autores.



Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 14: Ajuste del modelo empleando datos rezagados para la entidad 3



Fuente: Cálculos de los autores.



Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 15: Ajuste del modelo empleando datos rezagados para la entidad 4



Fuente: Cálculos de los autores.



Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 16: Ajuste del modelo empleando datos rezagados para la entidad 5



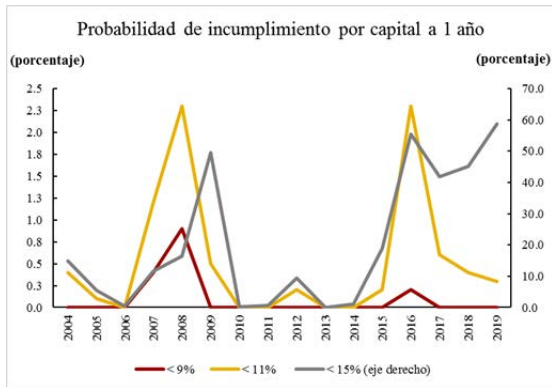
Fuente: Cálculos de los autores.



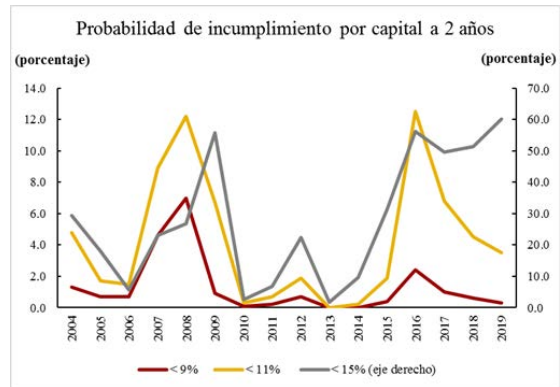
Fuente: Cálculos de los autores.

E Probabilidad de incumplimiento por solvencia

Gráfico 17: Probabilidad de incumplimiento por solvencia para la entidad 2

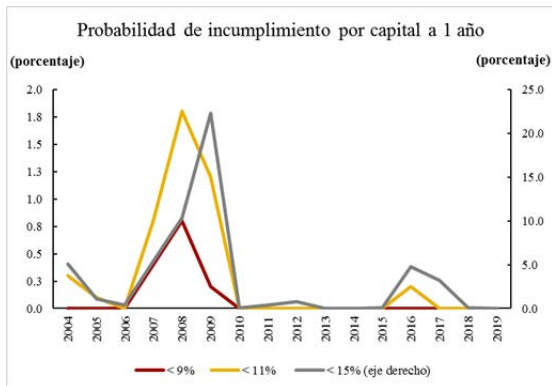


Fuente: Cálculos de los autores.

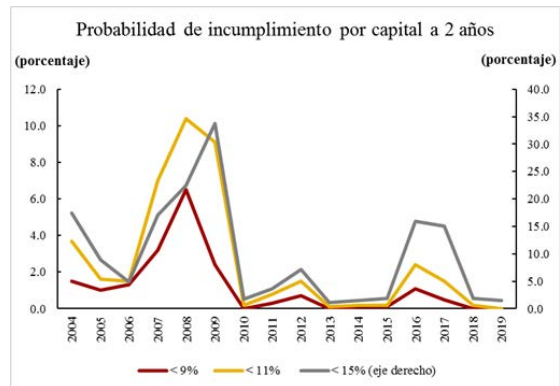


Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 18: Probabilidad de incumplimiento por solvencia para la entidad 3

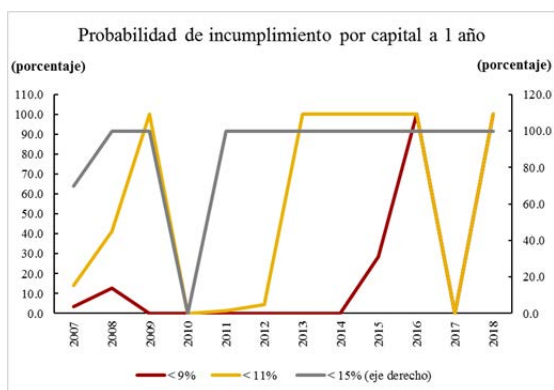


Fuente: Cálculos de los autores.

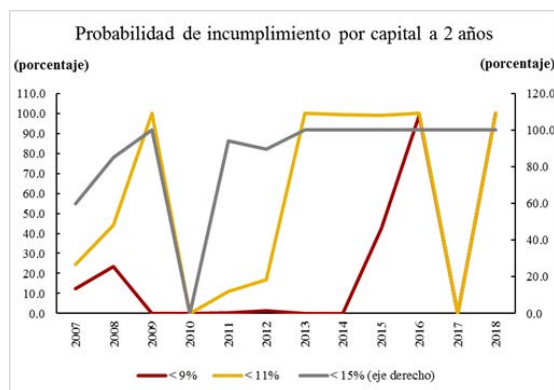


Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 19: Probabilidad de incumplimiento por solvencia para la entidad 4

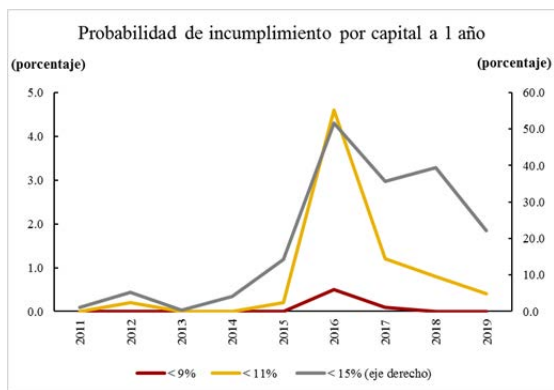


Fuente: Cálculos de los autores.

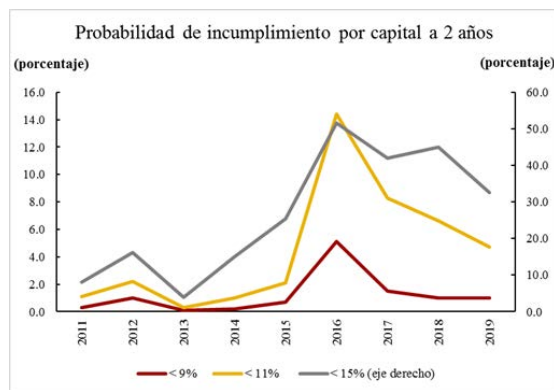


Fuente: Cálculos de los autores.

Gráfico 20: Probabilidad de incumplimiento por solvencia para la entidad 5



Fuente: Cálculos de los autores.



Fuente: Cálculos de los autores.

