

# BORRADORES DE ECONOMÍA



Productividad y eficiencia de los  
hospitales públicos en Colombia  
por niveles de complejidad:  
Nueva evidencia 2007 -2021

Por:  
Diego Vásquez-Escobar

Núm. 1333  
2025



# Productividad y eficiencia de los hospitales públicos en Colombia

## por niveles de complejidad: Nueva evidencia 2007 -2021♦

Las opiniones contenidas en el presente documento son responsabilidad exclusiva del autor y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva

Diego Vásquez-Escobar♦

### Resumen.

Se estima el índice de productividad de Malmquist, sus determinantes y la razón de brecha tecnológica, como medida de eficiencia potencial en hospitales públicos colombianos registrados en el SIHO entre 2007 y 2021. Utilizando una base de datos de panel y la metodología de Cao et al. (2017), se estiman funciones de distancia de Shephard orientadas a insumos y la metafrontera estocástica, permitiendo capturar la heterogeneidad de diferentes grupos de servicios de salud y de tecnologías entre niveles de complejidad hospitalaria. Los resultados muestran que los hospitales de nivel 3 son los más productivos y eficientes, los de nivel 1 superan a los de nivel 2 varios índices asociados a la eficiencia y en algunos impulsores de la productividad. La ineficiencia a nivel respecto de la frontera de grupo y el rezago en actualización tecnológica son los factores que más contribuyen, según las contribuciones de Shapley (1951), a la caída sostenida en la productividad.

**Palabras clave:** Productividad hospitalaria, Índice de Malmquist, Brecha tecnológica, Metafrontera estocástica, Funciones de distancia de Shephard orientadas a insumos, Sistema de información hospitalaria (SIHO), Empresas Sociales del Estado (ESE).

**Clasificación JEL:** C23, D24, I11, I18, L32

---

♦ Banco de la República, Bogotá, Colombia. [dvasques@banrep.gov.co](mailto:dvasques@banrep.gov.co), (ORCID: 0000-0003-2540-8806). Se agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de Ligia Melo y los grandes aportes y colaboración en la construcción de las variables de Lisseth M. Merchán Naranjo.

# Productivity and Efficiency of Public Hospitals in Colombia by Complexity Level: New Evidence from 2007 to 2021♦

The views expressed in this document sole responsibility of the author and do not represent the position of the Banco de la República or its Board of Directors.

Diego Vásquez-Escobar♦

## Abstract.

The Malmquist productivity index, its determinants, and the technology gap ratio—used as a measure of potential efficiency—are estimated for Colombian public hospitals registered in the SIHO database between 2007 and 2021. Using panel data and the methodology proposed by Cao et al. (2017), input-oriented Shephard distance functions and a stochastic metafrontier are estimated, allowing for the capture of heterogeneity across health service groups and technological differences among hospital complexity levels. The results indicate that Level 3 hospitals are the most productive and efficient, while Level 1 hospitals outperform Level 2 hospitals in several efficiency-related indices and in certain productivity drivers. According to Shapley (1951) value decompositions, group-level inefficiency relative to the frontier and delays in technological upgrading are the main contributors to the sustained decline in productivity.

**Keywords:** Hospital Productivity, Malmquist Index, Technology Gap, Stochastic Metafrontier, Input-Oriented Shephard Distance Functions, Hospital Information System (SIHO), State Social Enterprises (ESEs)

**JEL Classification:** C23, D24, I11, I18, L32

---

♦ Banco de la República, Bogotá, Colombia. [dvasques@banrep.gov.co](mailto:dvasques@banrep.gov.co), (ORCID: 0000-0003-2540-8806). Se agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de Ligia Mel y los grandes aportes y colaboración en la construcción de las variables de Lisseth M. Merchán Naranjo.

## **1. Introducción**

Las Empresas Sociales del Estado (ESE) son fundamentales para la equidad y sostenibilidad del sistema de salud colombiano. Aunque representan solo el 8.8 % de las Instituciones Prestadoras de Servicios (IPS), concentran cerca del 30 % de las camas hospitalarias, las ESE son las principales proveedoras de servicios de salud básicos en todo el territorio; 84.3% de estas corresponde al primer nivel de atención, el 13.4% al nivel 2 y el 2.3% al nivel 3. Constituyen la principal red de atención a los pacientes de régimen subsidiado de salud (54% de la población según la encuesta de calidad de vida del DANE).

Aunque la cobertura de afiliación al sistema de salud en Colombia es alta (alrededor del 98.5% en septiembre de 2024), esta cifra no refleja plenamente las barreras de acceso a los servicios de salud. Es en este contexto donde los hospitales públicos, especialmente en las regiones más apartadas, son cruciales (Amazonía, Orinoquía, Chocó y el Pacífico son las de mayor oferta limitada y donde las ESE cubren en parte esta brecha). Otro aspecto relevante es que Colombia contaba con 2.2 médicos por cada 1.000 habitantes en 2018, cifra por debajo del promedio latinoamericano. Muchos hospitales públicos, especialmente los de tercer nivel, son centros de formación para nuevos profesionales de la salud.

Lo anterior evidencia su papel estructural en la atención hospitalaria, tal como lo muestra el informe del Ministerio de Salud y Protección Social & Superintendencia Nacional de Salud (2024). Además, su presencia en zonas rurales y apartadas permite superar barreras de acceso, siendo instrumentos clave para la implementación de políticas públicas como el Plan de Intervenciones Colectivas (PIC) (Ministerio de Salud y Protección Social, 2015). La ANDI (2024) también destaca su rol en la articulación de esfuerzos para garantizar la sostenibilidad del sistema y el bienestar de los pacientes, especialmente en contextos de crisis.

Estas entidades, definidas en el Artículo 194 de la Ley 100 de 1993, son una categoría especial de entidad pública descentralizada, con personería jurídica, patrimonio propio y autonomía administrativa. Su misión dentro del Sistema General de Seguridad Social en Salud (SGSSS) es garantizar la prestación de servicios en los distintos niveles de atención a los afiliados y beneficiarios de los regímenes existentes.

A pesar de los avances normativos y estructurales, las ESE enfrentan desafíos persistentes que afectan su eficiencia y productividad. Entre ellos se destacan la presión financiera, la acumulación de cartera por parte de las EPS, la escasez de recursos, y la prestación de servicios no incluidos en el Plan Obligatorio de Salud (POS), lo que genera una carga adicional. La pandemia de COVID-19 exacerbó estas tensiones, exigiendo una rápida adaptación institucional y mayores inversiones en infraestructura y talento humano, principalmente en salud. Reformas como las leyes 1122 de 2007, 1438 de 2011 y la liquidación continuada de hospitales públicos, desde 2016 cuando se liquida SaludCoop, no lograron resolver las tensiones entre aseguradores y prestadores, afectando la estabilidad financiera hospitalaria.

Diversos estudios han documentado la caída en productividad debida al estancamiento tecnológico e ineficiencia técnica en los hospitales públicos, atribuidos a factores como la insuficiente capacidad instalada, el crecimiento en la demanda potencial y la debilidad en la articulación de redes hospitalarias. Sin embargo, la literatura nacional presenta limitaciones metodológicas importantes: uso de muestras parciales, uso de indicadores financieros como proxis del número de empleados y de otros insumos y predominio de enfoques no paramétricos como el análisis envolvente de datos (*DEA*), que no distinguen entre ineficiencia técnica y choques estocásticos.

Además, no se ha abordado simultáneamente la heterogeneidad derivada de la prestación de distintos servicios y de la operación por niveles de complejidad, con sus respectivas consecuencias en la estimación de productividad y eficiencia hospitalaria. Entre estas, la generación de sesgos significativos que afectan la comparabilidad entre instituciones penalizando injustamente a aquellas que atienden casos más complejos y pueden distorsionar los indicadores agregados, llevando a decisiones erróneas en política pública y diseño de incentivos. Adicionalmente, se corre el riesgo de subestimar la productividad real de hospitales que operan eficientemente en contextos de alta exigencia técnica y clínica.

Este estudio busca superar dichas limitaciones mediante el uso de la base completa del Sistema de Información Hospitalaria (SiHO) entre 2007 y 2021, aplicando por primera vez al análisis de productividad de hospitales públicos, principalmente en Colombia, la metodología paramétrica propuesta por Cao et al. (2017). Esta combina funciones de

distancia orientadas a insumos para capturar la heterogeneidad de diferentes servicios prestados, con el enfoque de metafrontera para modelar las diferencias tecnológicas entre los tres niveles de complejidad en los que operan las ESE. Con base en estos resultados, se calculan los componentes del índice Malmquist de cambio en la productividad total de los factores (PTF) de metafrontera, desde tres perspectivas complementarias, analizando su dinámica y evolución en el tiempo.

La validación estadística aplicada respecto a la forma funcional más adecuada (Cobb-Douglas vs. Translog) y de identidad de tecnologías de los niveles de complejidad, permite una representación más precisa del entorno productivo hospitalario. A partir de los parámetros estimados, se calcula dicho índice de Malmquist descomponiéndolo en eficiencia técnica y cambio tecnológico. Como aporte adicional, se usa la descomposición de Shapley para atribuir de forma precisa y aditiva la variación anual de la productividad a sus determinantes, incluso cuando interactúan de manera no lineal.

Los hallazgos revelan una caída sostenida en la PTF desde 2007, explicada en gran medida por el rezago en la adopción de tecnología de grupo y de metafrontera, así como por una creciente incapacidad de recuperar pérdidas de eficiencia. Esto implica que la recuperación de la productividad hospitalaria no es solo una cuestión de eficiencia interna, sino un desafío urgente de política tecnológica diferenciada por niveles de complejidad y por grupos de prestación de servicios, apoyada en evidencia empírica robusta.

Dado lo anterior, el objetivo de este trabajo es ofrecer nueva evidencia sobre la evolución de la productividad de las ESE en Colombia durante lo corrido del siglo, así como de sus principales impulsores: la eficiencia técnica y el cambio tecnológico. Además, como se mencionó, capturar las heterogeneidades de tres grupos de servicios de salud y de la operación en tres niveles de complejidad. Posteriormente, contrastar el desempeño en eficiencia y productividad de las ESE por niveles con las mejores prácticas del sistema hospitalario público en conjunto a partir de la metafrontera.

Para el logro del descrito objetivo, este trabajo se divide en seis secciones. La primera corresponde a esta introducción. En la segunda se presenta la revisión de literatura; en la tercera, los aspectos relevantes sobre los datos utilizados. La cuarta sección describe la metodología y en el Apéndice A algunos detalles técnicos sobre la misma. En la quinta sección se exponen los resultados y algunos detalles de la estimación, y en la sexta se

presentan las conclusiones. Finalmente, se incluyen dos apéndices adicionales: el Apéndice B explica el método de contribuciones de Shapley utilizado para analizar los impulsores del índice de PTF de Malmquist, y el Apéndice C contiene los resultados de las pruebas de razón de verosimilitud sobre identidad de tecnologías, la selección entre modelos Cobb-Douglas y Translog, la metodología del cálculo del índice de calidad y el resto de los parámetros estimados de las funciones de distancia y de la metafrontera.

## **2. Revisión de literatura.**

### **2.1 Contexto institucional y financiero del sistema de salud colombiano (2007–2021)**

Entre 2007 y 2011, el sistema de salud colombiano experimentó ajustes regulatorios y financieros que marcaron el inicio de una etapa de consolidación. La Ley 1122 de 2007 introdujo cambios clave como la creación de la CRES, la regulación de la integración vertical, el fortalecimiento del aseguramiento en el régimen subsidiado y la creación de la Cuenta de Alto Costo. En 2008, la Sentencia T-760 reconoció la salud como derecho fundamental autónomo, ordenando la cobertura universal, mientras que en 2009 se decretó una emergencia social para garantizar la sostenibilidad financiera. La Ley 1438 de 2011 marcó un punto de inflexión al fortalecer la salud pública, la portabilidad del aseguramiento, la política farmacéutica y el giro directo, además de eliminar los órganos de concertación como el CNSSS y la CRES.

Entre 2012 y 2021, se consolidaron reformas institucionales y se transformó el modelo de financiación. La Ley Estatutaria de Salud (Ley 1751 de 2015) redefinió el plan de beneficios, fortaleció el acceso, reguló los precios de medicamentos y reconoció los determinantes sociales como parte de la acción estatal. A través de los planes nacionales de desarrollo (PND), se adoptaron medidas como la creación de la Adres, la implementación de rutas integrales de atención, el mecanismo de presupuestos máximos y la modificación de la mezcla de financiación entre cotizaciones e impuestos. El gasto en salud mostró una tendencia creciente, alcanzando el 6.3% del PIB en 2020, con un gasto per cápita superior al promedio de América Latina y una baja proporción de gasto de bolsillo, lo que permitió un manejo destacado de la pandemia. La relación entre gasto público y resultados en salud

se evidenció en mejoras en indicadores como la mortalidad infantil y materna, y la esperanza de vida, además de una cobertura efectiva superior al promedio regional.

En el ámbito financiero, se redujo la participación de las cotizaciones como fuente principal de ingresos, mientras que los recursos fiscales aumentaron significativamente. El aseguramiento del régimen subsidiado se equiparó progresivamente al del régimen contributivo, impulsado por la igualación de los planes básicos de salud y el aumento de afiliados, especialmente migrantes venezolanos. El gasto no UPC, salud pública y residencias médicas también ganaron relevancia, mientras que el reconocimiento de servicios por fuera del plan básico de salud evolucionó desde los recobros por tutela y por los respaldados por el comité técnico científico hacia el uso de Mipres, con acumulación de deudas que fueron abordadas mediante el Acuerdo de Punto Final. Estas transformaciones reflejan un esfuerzo por mejorar la eficiencia, la equidad y la sostenibilidad del sistema de salud colombiano en un contexto de creciente demanda y presión fiscal (Granger, Melo-Becerra, Ramos-Forero & Silva-Samudio, 2023).

## **2.2 Productividad y eficiencia en hospitales públicos: evidencia empírica nacional e internacional**

La medición de la eficiencia y productividad en hospitales públicos colombianos ha sido objeto de atención desde inicios de los años 2000, con una trayectoria metodológica dominada por enfoques no paramétricos, particularmente el análisis envolvente de datos (*DEA*)<sup>1</sup>. Estudios pioneros son el de Pinzón (2003) y Toro (2006) que aplicaron *DEA* y técnicas multivariadas para evaluar la eficiencia técnica relativa de hospitales públicos, especialmente de baja complejidad. Aunque estos trabajos sentaron las bases para el análisis comparativo entre instituciones, su alcance se centra más en la eficiencia que en la evolución de la productividad y sus componentes.

---

<sup>1</sup> En el análisis de eficiencia mediante *DEA*, se han desarrollado varios índices que permiten evaluar la productividad desde distintas perspectivas. El índice de Malmquist es el más común, ya que mide el cambio en productividad entre dos periodos, descomponiéndolo en eficiencia técnica y cambio tecnológico. El indicador de Luenberger, basado en funciones de distancia direccional, permite incorporar outputs no deseados. El índice Hicks-Moorsteen ofrece una alternativa cuando hay problemas de separabilidad temporal, mientras que el Färe-Primont permite descomponer la productividad en eficiencia técnica, de escala y de mezcla. Finalmente, el índice dinámico Malmquist-Luenberger extiende estos enfoques a contextos Inter temporales y redes, siendo útil cuando existen *carry-overs* o productos no deseados.

Posteriormente, Maldonado y Tamayo (2007) estiman la eficiencia de los hospitales públicos, según cinco grupos homogéneos de complejidad de servicio, anticipando la necesidad de capturar la heterogeneidad estructural del sistema. En contraste, Toro (2006) cuestionó dicha clasificación por niveles argumentando que responde más a criterios administrativos que funcionales, dado que hospitales de primer nivel pueden ofrecer procedimientos de segundo nivel. Sin embargo, la segmentación por niveles está respaldada por la Resolución 3100 de 2019 y por estándares internacionales (OMS, OPS, OCDE), que reconocen que la complejidad institucional no solo depende los servicios prestados, sino también de la infraestructura, el equipamiento y los protocolos clínicos, lo que justifica su uso como criterio analítico para estimar la eficiencia y la productividad.

Durante la década siguiente, los estudios sobre productividad hospitalaria en Colombia se ampliaron y sofisticaron. Orozco (2020) aplicó el indicador de productividad de Luenberger (LPI) a 336 hospitales (2003–2011), evidenciando una caída atribuida a baja inversión tecnológica. Este índice permite análisis regionales y evita sobreestimaciones. Guzmán (2015), desde el Banco de la República, combinó análisis cuantitativo y estudios de caso, identificando disparidades regionales (zonas Central y Caribe) y factores institucionales. Retoma trabajos previos como Montoya (2013), quien estimó una función de distancia Translog con el enfoque Primal Divisia en 83 hospitales de niveles 2 y 3, descomponiendo la PTF en eficiencia técnica y cambio tecnológico. Estudios regionales como los de Murillo y García (2019), Arias y Ramírez (2021), y Navarro y Maza (2011) aportan evidencia contextual, pero comparten limitaciones: uso exclusivo de DEA, periodos cortos, cobertura parcial y ausencia de estimaciones de PTF. Incluso trabajos recientes como Hincapié y Montoya (2024) mantienen estos enfoques sin descomponer sus impulsores.

En paralelo, han surgido propuestas conceptuales y metodológicas que han contribuido a clarificar definiciones, variables e indicadores de gestión hospitalaria. Entre ellas se encuentran la metodología para la medición de la productividad en IPS (Cadavid et al., 2021), el trabajo “Estado del arte: productividad como concepto en salud” (Arbaiza et al. 2023), Indicadores de productividad en hospitales públicos (Medina y De Marco, 2017), y Propuesta de redefinición de la operación de hospitales públicos (Ministerio de salud y protección social MSPS, 2022). Aunque estas contribuciones aportan marcos útiles para la

formulación de políticas, no desarrollan estimaciones empíricas de productividad total de los factores a escala nacional.

Otros estudios han abordado dimensiones complementarias como la calidad, el desempeño financiero y la gestión institucional. Por ejemplo, Medición de la calidad, la eficiencia y la productividad en hospitales públicos de tercer nivel en Bogotá (Carreño, 2009) compara indicadores operativos y de resultados clínicos; Factores determinantes en la crisis de las IPS en Colombia (Criterio Libre, 2020) analiza variables financieras que afectan la sostenibilidad institucional; y el Ranquin de IPS del Ministerio de Salud (2024) ofrece una evaluación comparativa basada en indicadores de calidad, accesibilidad y equidad, que aunque no mide productividad directamente, se relaciona con el desempeño general del sistema.

La literatura colombiana sobre eficiencia y productividad hospitalaria presenta tres limitaciones clave: (i) ausencia de estimaciones de PTF con índices Malmquist y técnicas de metafrontera que separen ineficiencia técnica de cambio tecnológico; (ii) falta de modelación de la heterogeneidad tecnológica por niveles de complejidad y grupos funcionales de servicios; y (iii) cobertura limitada de datos, lo que impide identificar patrones estructurales de largo plazo.

Este estudio aborda dichas brechas mediante funciones de distancia a fronteras estocásticas de grupo y a la metafrontera (Cao et al., 2017), permitiendo estimar índices Malmquist diferenciados por nivel de complejidad, ajustar por heterogeneidad tecnológica y derivar implicaciones útiles para la política hospitalaria. Además, incorpora factores de producción como talento humano, personal de apoyo, capacidad instalada, tamaño relativo en activos, población municipal y una variable indicadora de la pandemia, ofreciendo una caracterización más precisa del sistema hospitalario público.

Adicional a los estudios colombianos, existe una literatura internacional y regional que ha enriquecido el marco conceptual sobre eficiencia y productividad hospitalaria. A nivel internacional, Färe et al. (1994) y Fuentes et al. (2001) establecieron las bases del índice Malmquist mediante funciones de distancia, destacando la separación entre eficiencia técnica y cambio tecnológico. Kumbhakar et al. (2007) propusieron un enfoque mixto entre funciones orientadas a insumos y productos, aplicado en sectores como el

ferroviario europeo. Más recientemente, Medarević y Vuković (2021) aplicaron el índice Malmquist y regresión Tobit a hospitales públicos en Serbia.

En América Latina, destacan Armijos y Núñez (2020) con un análisis comparativo en Chile y Ecuador, y Cadavid et al. (2021), quienes adaptan metodologías al contexto de las IPS. En Colombia, Carreño (2009) y Crispín et al. (2023) evaluaron eficiencia hospitalaria con funciones de distancia, aunque sin incorporar heterogeneidad interna ni metafrontera.

El uso de metafrontera en Colombia ha sido aplicado por Melo y Orozco (2017) para estudiar la eficiencia en el sector agropecuario, y por Arbona et al. (2022) en educación. En cuanto a la metafrontera estocástica con funciones de distancia, destacan Cao et al. (2017) para estimar el índice Malmquist<sup>2</sup> en el sector industrial chino y Molinos et al. (2023) en empresas de acueducto en Inglaterra y Gales, abordando la incomparabilidad entre unidades heterogéneas.

### **3. Datos de cantidad de ESE, servicios e insumos.**

Para la estimación de los coeficientes de las funciones de distancia en cada nivel de complejidad y en la metafrontera, se utilizan datos de panel correspondientes al periodo 2007–2021, reportados por cada ESE a través del sistema SiHO<sup>3</sup>. Estos datos abarcan tres grupos de servicios de salud —que se detallarán más adelante<sup>4</sup>— orientados a capturar la heterogeneidad tecnológica requerida para su prestación:

- i) procedimientos quirúrgicos e intervenciones,

---

<sup>2</sup> En el enfoque paramétrico de análisis de eficiencia y productividad, tal como el de frontera estocástica (*SFA*), se utilizan diversos índices, además del Malmquist, para medir la productividad. El Índice Tornqvist, basado en medias geométricas ponderadas, es compatible con estimaciones econométricas como *SFA*. El Índice Ideal de Fisher, que combina los índices de Laspeyres y Paasche mediante una media geométrica, puede integrarse en modelos *SFA* para el análisis de eficiencia. El Índice Divisia, aunque requiere datos en tiempo continuo, puede aproximarse mediante el Tornqvist y se emplea en estudios de crecimiento económico con *SFA*. Finalmente, el Índice Superlativo de Diewert, que cumple con los axiomas de la teoría de índices, también puede incorporarse en modelos *SFA* para el análisis detallado de la productividad.

<sup>3</sup> El Ministerio de salud y protección social define el Sistema de Gestión Hospitalaria (SiHO) como el sistema donde las empresas sociales del Estado (ESE) registran periódicamente los resultados presupuestales, de atenciones, financieros y administrativos, con el aval de la entidad territorial, y que le sirve al Gobierno Nacional y a otros actores del sistema de salud colombiano para la toma de decisiones.

<sup>4</sup> La descripción detallada de los grupos de servicios e insumos se presenta en la sección siguiente.

- ii) procedimientos de apoyo, diagnóstico y tratamiento,
- iii) consultas y actividades de prevención.

Esta clasificación permite minimizar la presencia de valores faltantes en cada nivel de complejidad, ya que prácticamente todas las ESE prestan servicios en estas categorías, independientemente del nivel al que pertenezcan.

La metodología paramétrica, basada en funciones de distancia orientadas a insumos y en el enfoque de metafrontera, requiere que los grupos de servicios sean comunes a los tres niveles de complejidad. Esta condición garantiza la comparabilidad entre unidades y permite diferenciar la ineficiencia técnica del término de error estocástico, lo que contribuye a obtener estimaciones más robustas y confiables.

Además, se incluye información del sistema SiHO sobre los siguientes grupos de insumos —también detallados más adelante—:

- i) Camas, unidades odontología y quirófanos,
- ii) Consultorios generales, de parto y cirugía,
- iii) Empleados de apoyo que no son THS,
- iv) Talento humano en salud (THS).

Adicional a las variables provenientes de SiHO se incluye una tendencia lineal, una tendencia cuadrática y las variables “ambientales” que afectan el valor de la media de la ineficiencia estimada ( $\mu_u$ ), es decir, “*tamaño*” de las ESE para los niveles 1 y 2, y  $\ln(\textit{tamaño})$  para el nivel 3; las variables que afectan a la media de la varianza de la ineficiencia ( $\mu_\sigma$ ), es decir, el intercepto para todos los niveles y el crecimiento del  $\ln(\textit{población municipal})$  para el nivel 3 y, finalmente, el intercepto que afecta a la varianza de la ineficiencia ( $\sigma$ ) de cada nivel de complejidad.

El Cuadro 1 presenta el número de Empresas Sociales del Estado (ESE) clasificadas según su carácter nacional, departamental, distrital y municipal.

## Cuadro 1.

### Cantidad de ESE por nivel de complejidad y carácter

Nivel de complejidad					Carácter					
Año	1	2	3	Total	Año	Departamental	Distrital	Municipal	Nacional	Total
2007	520	91	19	630	2007	184	2	443	1	630
2008	550	93	19	662	2008	188	2	470	2	662
2009	564	94	19	677	2009	192	2	481	2	677
2010	563	94	19	676	2010	194	2	478	2	676
2011	565	93	19	677	2011	191	2	482	2	677
2012	567	92	20	679	2012	192	2	483	2	679
2013	559	92	20	671	2013	192	2	475	2	671
2014	563	92	20	675	2014	192	2	479	2	675
2015	575	93	20	688	2015	192	2	492	2	688
2016	563	92	24	679	2016	192	6	479	2	679
2017	573	95	24	692	2017	195	6	488	3	692
2018	560	96	24	680	2018	196	6	476	2	680
2019	561	96	23	680	2019	194	6	478	2	680
2020	553	98	23	674	2020	197	6	469	2	674
2021	563	96	24	683	2021	190	6	485	2	683
Total	8399	1407	317	10123	Tota	2881	54	7158	30	10123

Fuente: SiHO, Ministerio de Salud y Protección Social.  
Cálculos del autor.

Para garantizar la calidad de las estimaciones, del total de 14.062 ESE que suman en todo el período con información en la base de datos original (2007–2021), se excluyeron 3.937 ESE que no reportaban al menos cinco procedimientos en las siguientes categorías de servicios:

- i) quirúrgicos e intervenciones,
- ii) procedimientos de apoyo diagnóstico y tratamiento,
- iii) consultas y actividades de prevención.

Adicionalmente, se excluyeron aquellas ESE que no contaban con al menos cinco unidades en las siguientes categorías de insumos:

- i) camas, unidades odontológicas y quirófanos;
- ii) consultorios, mesas de parto y cirugía;
- iii) cinco empleados pertenecientes al talento humano en salud (THS); y
- iv) al menos un empleado que no perteneciera al grupo de THS. Como resultado, se eliminaron los prestadores clasificados como profesionales independientes.

Este proceso de depuración permite eliminar valores extremos ínfimos y observaciones con datos faltantes que podrían distorsionar la muestra, afectar la convergencia del algoritmo numérico utilizado en la estimación y sesgar innecesariamente las comparaciones. A pesar de estos filtros, se conserva una muestra amplia y representativa del universo de hospitales públicos, lo que mitiga el riesgo de contar con pocas unidades por período para estimar un elevado número de parámetros derivados de la especificación Trans-Log de las funciones de distancia. Esto, a su vez, permite generalizar los resultados al conjunto del sistema hospitalario público, como lo plantea Montoya (2013).

Contar con información completa sobre la prestación de servicios e insumos en los tres niveles de complejidad evita tanto el sesgo de selección —al no limitarse a una muestra reducida y poco representativa del sector hospitalario público— como errores metodológicos derivados de excluir niveles o tratarlos como homogéneos. Esto es especialmente importante en el primer nivel, que concentra la mayoría de las ESE y servicios registrados.

Además, esta información integral permite que la inferencia y las conclusiones del modelo se atribuyan válidamente al sistema hospitalario público en su conjunto, conforme al enfoque de metafrontera, que compara unidades con tecnologías heterogéneas bajo una frontera común.

Dado lo establecido en el Artículo 194 de la Ley 100 de 1993 sobre las ESE, es pertinente precisar el alcance de los tres niveles de complejidad. El Ministerio de Salud indica que esta clasificación antecede a la Ley 100, con antecedentes en la Ley 10 de 1990 y el Decreto 1760 del mismo año. La Resolución 5261 de 1994 definió los criterios para clasificar las ESE en primer, segundo y tercer nivel, cada uno con funciones y capacidades específicas.

El primer nivel de atención, puerta de entrada al sistema de salud, se enfoca en atención ambulatoria, promoción, prevención y tratamiento de problemas comunes. Opera con personal médico general y auxiliar en centros y puestos de salud.

El segundo nivel incluye hospitales de referencia que atienden patologías más complejas, con servicios especializados, hospitalización básica y urgencias. Cuenta con

médicos especialistas como internistas, pediatras, ginecólogos y cirujanos; sus instituciones típicas son los hospitales generales.

El tercer nivel abarca hospitales de alta complejidad con tecnología avanzada y personal altamente especializado. Atiende patologías complejas, procedimientos quirúrgicos especializados y rehabilitación. Dispone de todas las especialidades médicas, UCI, laboratorios y equipos de diagnóstico sofisticados, como los hospitales universitarios y centros de alta complejidad.

Respecto al talento humano en salud, los niveles de complejidad se definen por las actividades, intervenciones y procedimientos, no por las instituciones. Generalmente, el primer nivel incluye médicos generales y personal auxiliar, el nivel 2 incluye médicos generales con interconsulta y remisión a personal especializado, y el nivel 3 y 4 (cuando aplica) incluyen médicos especialistas con la participación de médicos generales. Esta distinción es crucial para entender que el Plan Obligatorio de Salud Subsidiado (POS-S) cubre actividades de primer nivel, independientemente de la institución que las ofrezca.

En síntesis, la clasificación en niveles de atención permite organizar el sistema de salud para optimizar los recursos y brindar atención adecuada según la complejidad de cada caso, desde la atención primaria hasta la atención de alta especialización.

En el Cuadro 2 se presenta la cantidad de ESE y la población por departamento para 2007 y 2021 con el fin de tener una idea de las necesidades de cobertura al principio y final del período de análisis.

La distribución departamental de hospitales públicos en Colombia (2007 y 2021), del Cuadro 2, muestra una mayor concentración en la región andina, especialmente en Antioquia, Cundinamarca y el Eje Cafetero, mientras que regiones periféricas como la Amazonía, Orinoquía y zonas costeras presentan menor densidad. Sin embargo, al ajustar por población, Boyacá lidera con 8.3 hospitales por cada 100 mil habitantes, seguido por Nariño (4.5), Santander (3.8) y Huila (3.7); Antioquia tiene solo 2 y Bogotá la menor proporción (0.05).

Entre 2007 y 2021 se observan variaciones significativas en el número de hospitales por departamento, con alta concentración en Antioquia, Boyacá, Santander y Nariño. En la región andina hay una leve disminución de ESE, mientras que en otros departamentos se mantiene o aumenta.

## Cuadro 2.

### Distribución geográfica las ESE por departamentos y población

Departamento	ESE (2007)	Habitantes (2007)	ESE (2021)	Habitantes (2021)	ESE N1 (2021)	ESE N2 (2021)	ESE N3 (2021)
Amazonas	1	68519	1	82171	0	1	0
Antioquía	123	5831851	123	6726219	107	13	3
Arauca	4	238605	4	300637	2	2	0
Atlántico	26	2227713	23	2741002	22	0	1
Bogotá	2	7050133	6	7823334	0	0	6
Bolívar	38	1924139	40	2202773	35	4	1
Boyacá	105	1265198	105	1271639	94	10	1
Caldas	29	973226	29	1028635	23	5	1
Caquetá	3	427634	6	418267	5	1	0
Casanare	5	306510	5	452098	4	1	0
Cauca	19	1285794	19	1525284	16	2	1
Cesar	28	929096	28	1322378	24	4	0
Chocó	5	467374	5	573848	4	1	0
Córdoba	30	1514575	30	1864336	26	4	0
Cundinamarca	49	2355408	52	3233689	44	7	1
Guainía	*	36381	*	53583	*	*	*
Guaviare	2	98189	2	91719	1	1	0
Huila	40	1038061	40	1151211	36	3	1
La Guajira	21	715175	16	993081	13	3	0
Magdalena	34	1180703	34	1454154	28	5	1
Meta	15	817857	15	1098104	13	2	0
Nariño	79	1578877	68	1678786	63	4	1
Norte de Sant.	16	1267028	16	1654341	11	4	1
Putumayo	10	319804	10	371213	7	3	0
Quindío	14	542752	13	557099	10	2	1
Risaralda	16	911239	16	968287	12	3	1
S. Andrés y Pr.	*	72923	*	62159	*	*	*
Santander	80	1975963	83	2312097	75	6	2
Sucre	20	792377	27	966893	24	3	0
Tolima	50	1371253	49	1361931	41	7	1
Valle del Cauca	53	4257741	53	4613764	45	7	1
Vaupés	1	39231	1	44378	0	1	0
Vichada	1	60463	1	118270	0	1	0
TOTAL	919	43941792	920	51117380	785	110	25

Fuente: SIHO, Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE) y cálculos del autor. Nota: La población en 2021 corresponde a una proyección elaborada por el DANE.

\* Sin información disponible en la fuente original.

El 85% de las ESE son de primer nivel, proporción constante en 2021. Los niveles 2 y 3 son menos frecuentes y se concentran en pocos departamentos, generando

desigualdades en atención especializada. Aunque Antioquia tiene el mayor número absoluto de ESE, departamentos como Vaupés y Vichada presentan cobertura muy limitada, y los datos ajustados por población no siempre reflejan esta concentración.

La evolución demográfica muestra un crecimiento poblacional generalizado, lo que plantea desafíos para la planificación del sistema de salud, especialmente donde el número de ESE no ha crecido al mismo ritmo. En resumen, la distribución y complejidad de las ESE reflejan desigualdades territoriales, con mayor concentración en zonas andinas y urbanas, y limitada cobertura en regiones periféricas.

El Cuadro 3 presenta estadísticas descriptivas agregadas por año, y también muestra la evolución anual de servicios e insumos por nivel de complejidad, evidenciando un crecimiento lento pero sostenido.

**Cuadro 3**  
**Estadísticas descriptivas anuales por ESE.**

Variable	Media	SD	Min	p25	p50	p95	Max
<b>Insumos</b>							
Camas, unidades odont. y quiróf	48	91	5	13	20	177	1327
Talento humano en salud (THS)	46	106	3	13	22	145	1904
Consultor., mesas de parto y cirug.	17	82	5	6	9	44	7803
Empleados que no son THS	20	41	1	6	11	52	705
<b>Servicios</b>							
Proced. quirúrgicos e intervenciones	15140	24206	11	4134	7878	49297	479595
Proced. de apoyo, diag. y tratamient.	104376	193651	688	21627	42834	400110	2611385
Consultas y prevención	117735	182152	1438	39013	68104	354332	2811024

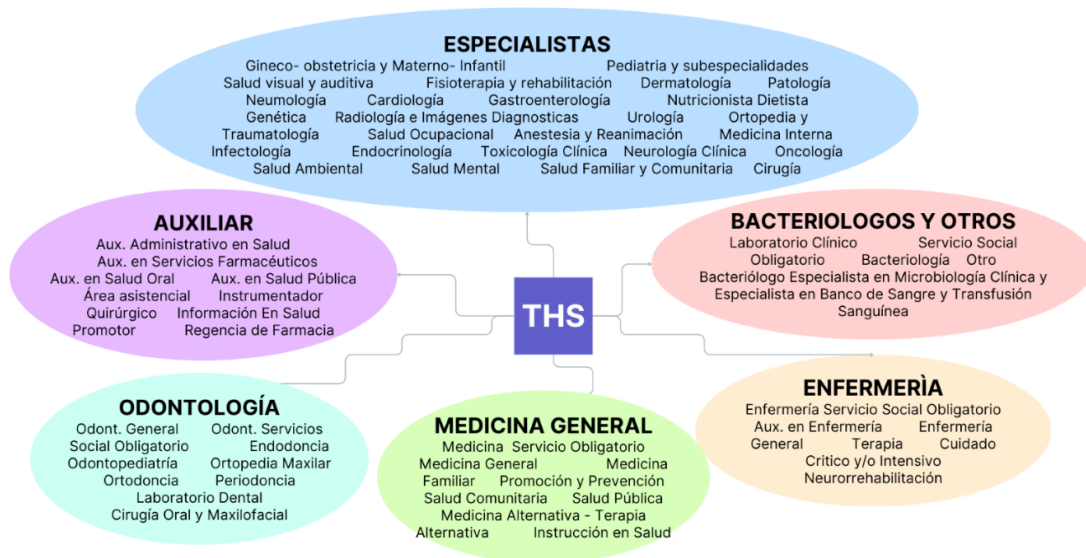
Fuente: SiHO y cálculos del autor.

Nota: estadísticas descriptivas para las observaciones anuales entre 2007 y 2021 de 10.123 ESE de diferentes niveles de complejidad.

Los servicios de salud prestados por las ESE se agrupan en tres categorías, comunes a los tres niveles de complejidad, aunque en proporciones distintas, según el manual de administración de servicios y procedimientos<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Esta agrupación de servicios y capacidad instalada, común en la literatura de eficiencia y productividad de salud, se realiza, según juicio de expertos, con base en los siguientes criterios: i) los servicios, aunque con diferencias clínicas, su grado de homogeneidad funcional corresponde a su ejecución procedimental según requerimientos de infraestructura hospitalaria, personal médico general, especializado y THS de apoyo. En cuanto a los insumos la homogeneidad de su agrupación responde a su estructura de costos, complementariedad con la prestación de los grupos de servicios de salud y su respectiva complejidad.

- Procedimientos quirúrgicos e intervenciones: partos (vaginales y por cesárea), exodoncias, obturaciones, cirugías, atención en cuidados intermedios, observación y cuidados intensivos.
- Procedimientos de apoyo, diagnóstico y tratamiento: exámenes de laboratorio, imágenes diagnósticas, terapias físicas, respiratorias y otras, aplicación de sellantes y egresos totales.
- Consultas y prevención: consultas médicas generales y especializadas (electivas y urgentes), odontológicas, citologías, controles de enfermería, dosis biológicas y sesiones odontológicas.



**Figura 1. Conformación del Talento humano en salud de las ESE en Colombia**

**Fuente: elaboración propia.**

Los cuatro grupos de insumos están constituidos de la siguiente forma:

- Camas, unidades odontología y quirófanos: camas para hospitalización, de observación, de odontología y de quirófanos.
- Consultorios generales, de parto y cirugía: de consulta externa, de urgencias y de parto.
- Empleados de apoyo que no son THS: apoyo asistencial, técnico, profesional, directivo, asesor y apoyo oficial.

- Talento humano en salud (THS) descrito en la Figura 1.

A diferencia del uso de indicadores contables como proxis de los insumos, esta información detallada de cantidades de empleados y de capacidad instalada evita sesgos derivados de agregaciones imprecisas y refleja mejor la estructura operativa real. Además, los gastos contables pueden estar influenciados por factores externos como la inflación o decisiones administrativas, lo que distorsiona la medición del uso real de recursos y dificulta comparaciones entre instituciones. Por tanto, el uso de datos físicos detallados mejora la calidad del análisis y la validez de las conclusiones sobre eficiencia y productividad. A manera de síntesis, el Cuadro 4 permite ver la dinámica de las medianas de los grupos de servicios y de los grupos de insumos usados en las estimaciones.

**Cuadro 4.**  
**Medianas anuales por ESE de insumos y productos.**

Año	Procedim. Quirúrgic. e intervenc.	Proced. de apoyo, diagnóst. y tratamient.	Consultas y prevención	Año	Camas, unidades odontol. y quirófanos	Talento humano en salud (THS)	Consult. mesas de parto y cirugía	Empleados que no son THS
2007	7118	34276	59028	2007	20	26	8	12
2008	7163	34053	62070	2008	19	25	8	11
2009	7475	33392	66448	2009	19	23	9	11
2010	7225	36372	67094	2010	19	23	9	11
2011	7690	36215	67704	2011	20	23	9	11
2012	7930	38746	70596	2012	20	22	9	11
2013	8554	42903	72238	2013	20	22	9	11
2014	9160	45596	73575	2014	20	22	9	11
2015	8642	46012	72759	2015	20	21	9	11
2016	8726	48299	72885	2016	20	22	9	11
2017	8817	48623	70821	2017	20	22	9	11
2018	9157	53293	75724	2018	21	21	10	11
2019	9313	55981	75832	2019	21	21	10	11
2020	4635	38364	50365	2020	21	21	10	11
2021	6969	52103	75066	2021	21	20	11	10
Mediana	7878	42834	68104	Mediana	20	22	9	11

Fuente: SiHO y cálculos del autor.

Nota: el Cuadro muestra las medianas anuales por ESE a partir de una base de observaciones anuales entre 2007 y 2021 para ESE de 3 diferentes niveles de complejidad.

## 4. Metodología.

### 4.1 Índice de crecimiento Malmquist de productividad multifactorial y sus impulsores.

Con base en la metodología de Cao et al. (2017), que integra desarrollos previos de autores como Du y Lin (2017), O'Donnell et al. (2008), Battese y Rao (2002), entre otros referentes clave en la literatura sobre eficiencia, se adopta un enfoque robusto para analizar la productividad y eficiencia de las Empresas Sociales del Estado (ESE) en Colombia entre 2007 y 2021. Este estudio sigue una estrategia metodológica similar a la aplicada por Molinos et al. (2023), centrada en el análisis del cambio en la productividad multifactorial y la eficiencia.

Esta aproximación resulta especialmente adecuada por dos razones. Primero, como señala Crispin et al. (2023), las funciones de distancia orientadas a insumos no requieren asumir maximización de beneficios, lo cual es coherente con el carácter público de las ESE. Segundo, el enfoque de metafrontera permite identificar brechas tecnológicas y de gestión al establecer un referente de eficiencia máxima según la tecnología disponible. En consecuencia, la orientación a insumos se considera la más adecuada para evaluar la eficiencia de estas entidades públicas.

Se reconocen  $j$  grupos de ESE diferenciados según su nivel de complejidad en el sector salud

$$P^j = \{(x^j, y^j \mid (x^j \text{ pueden producir } y^j))\} \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (1)$$

La producción de los  $y^j$  de grupos de servicios de salud usando los  $x^j$  grupos de insumos a partir de la tecnología de metafrontera se denota por:

$$P^* = \{(x, y \mid (x \text{ puede producir } y))\} \quad (2)$$

Donde  $P^j$  y  $P^*$  son las tecnologías de frontera de grupo y metafrontera, respectivamente. La función de distancia se define de la siguiente manera:

$$D_i^j(x, y) = \max \left\{ \rho : \rho > 0 \left( \frac{x}{\rho}, y \in P^j \right) \right\} \quad (3)$$

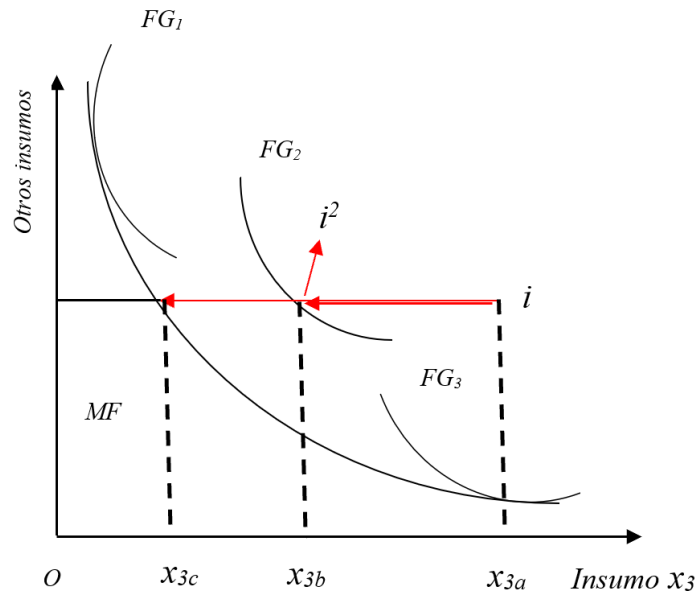
$$D_i^*(x, y) = \max \left\{ \rho: \rho > 0 \left( \frac{x}{\rho}, y \in P^* \right) \right\} \quad (4)$$

En las ecuaciones (3) y (4),  $\rho$  denota la máxima posibilidad de ahorro de insumos mientras no haya cambios en la combinación de insumo-producto.

Las tecnologías de frontera de grupo  $P^j$  y de metafrontera  $P^*$ , definidas en las ecuaciones (1) y (2), representan los conjuntos de posibilidades de producción utilizados por las ESE para la prestación de servicios de salud, con  $j = 1, 2, 3$  correspondiente a cada nivel de complejidad.

El ejemplo gráfico de la Figura 2 —tomada de Cao et al. (2017)— ilustra gráficamente la generación de los conceptos metodológicos iniciales. En este caso, las ESE combinan el insumo  $x_3$  con “otros insumos” para la prestación de servicios de salud en tres niveles de complejidad. Los niveles 1 y 3 se encuentran en el nivel óptimo de eficiencia grupal y eficiencia respecto a la metafrontera, mientras que el nivel 2 resulta ineficiente en comparación con las mejores prácticas del sistema hospitalario.

Dentro del nivel 2, la ESE  $i$  presenta un nivel de eficiencia grupal inferior al de la ESE  $i^2$ . Aunque ambas son ineficientes respecto a la metafrontera, la ESE  $i$  exhibe el peor desempeño, ya que también resulta ineficiente en relación con las mejores prácticas dentro de su propio grupo tecnológico.



**Figura 2. Fronteras estocásticas grupales, metafrontera, funciones de distancia de Shephard y los conceptos que de estas se derivan.**

El segmento  $\overline{Ox_{3a} - Ox_{3c}}$  representa la distancia de Shephard ( $D_i^*$ ) desde la ESE  $i$  hasta la metafrontera, según la ecuación (4). Esta distancia refleja la ineficiencia de la ESE  $i$  en relación con la entidad más eficiente del sistema hospitalario público.

El valor de  $D_i^*$  mide el potencial de mejora en eficiencia tanto a nivel grupal como individual, en comparación con las mejores prácticas del sistema hospitalario en su conjunto (valores más bajos indican mayor eficiencia). Su inversa,  $1/D_i^*$ , corresponde a la eficiencia relativa de la ESE  $i$  respecto al sistema, también conocida como metaeficiencia.

1.  $\overline{Ox_{3a} - Ox_{3b}}$  corresponde a  $D_i^2$ , la Distancia de Shephard desde la ESE  $i$  hasta la frontera de grupo (nivel 2) —Ecuación (3)—. Su inversa,  $(1/D_i^2)$ , representa la eficiencia de  $i$  respecto de la ESE ideal del nivel 2 o en comparación con respecto a las mejores prácticas al interior de dicho nivel.
2.  $\overline{Ox_{3b} - Ox_{3c}}$ : equivale a  $D_i^{2*}$ , la Distancia de Shephard desde las ESE del nivel 2 hasta la metafrontera, es decir, hasta la ESE ideal del sistema hospitalario público. Su inversa,  $(1/D_i^{2*})$ , constituye la eficiencia de grupo respecto a la metafrontera.

Esta relación se expresa como:  $D_i^{2*} = D_i^*/D_i^2$  lo que define la eficiencia potencial de las ESE del nivel 2 respecto de la metafrontera, también conocida como la razón de brecha tecnológica (*TGR*, por sus siglas en inglés).

A partir de los segmentos  $\overline{Ox_{3a}}$  y  $\overline{Ox_{3b}}$  se define el Índice de eficiencia grupal como:

$$GEI = \overline{Ox_{3b}}/\overline{Ox_{3a}}$$

Este índice, presentado en la ecuación (5), mide la eficiencia de una ESE real de nivel 2 respecto a su propia frontera de grupo.

De forma análoga, se define el Índice de Metaeficiencia (*MEI*) para las ESE de nivel 2 como:

$$MEI = \overline{Ox_{3c}}/\overline{Ox_{3a}}$$

Este índice representa la eficiencia de una ESE del nivel 2 en relación con la metafrontera, es decir, con las mejores prácticas del sistema hospitalario público en su conjunto. Equivalentemente:

$$GEI = \frac{1}{D_i^j(x, y)} \quad (5)$$

$$MEI = \frac{1}{D_i^*(x, y)} \quad (6)$$

En la Figura 2, se puede ver que la metafrontera, orientada a insumos, es la curva envolvente de las fronteras grupales, la función de distancia Shephard hospitalaria específica del grupo (índice de eficiencia hospitalaria de la frontera grupal,  $GEI = \overline{Ox_{3b}}/\overline{Ox_{3a}}$  no es mayor (menor) que la función de distancia de Shephard hospitalaria a la metafrontera (índice de eficiencia hospitalario de metafrontera,  $MEI = \overline{Ox_{3c}}/\overline{Ox_{3a}}$ . Por lo tanto:

$$D_i^*(x, y) \geq D_i^j(x, y), \quad MEI \leq GEI \quad (7)$$

Según Cao et al. (2017), una ESE puede incrementar su índice de metaeficiencia  $MEI$  o eficiencia relativa a la metafrontera de tres maneras:

1. Mejorando su eficiencia dentro del grupo ( $GEI$ ), manteniendo constante la brecha tecnológica respecto a la metafrontera.
2. Reduciendo la brecha tecnológica entre su frontera de grupo y la metafrontera (mejorando  $PEI$ ), sin cambios en su eficiencia específica de grupo.
3. Mejorando simultáneamente su eficiencia específica de grupo y su eficiencia potencial.

Además, la relación  $MEI/GEI$  de la ESE  $i$  puede expresarse como la razón de  $\overline{Ox_{3c}}/\overline{Ox_{3b}}$ , lo que refleja la eficiencia técnica entre la frontera del grupo ( $FG_2$ ) y la metafrontera ( $MF$ ). Por tanto, si se considera  $i'$  como la ESE eficiente hipotética o potencial asociada a la ESE simulada  $i$  en relación con su frontera de grupo, el *Technology gap ratio* ( $TGR$ ) también denominado Índice de brecha tecnológica o índice de razón de

metatecnología del grupo  $j$  puede interpretarse como un índice de eficiencia potencial hospitalario ( $PEI$ ), que se define como:

$$TGR(x, y) = \frac{MEI}{GEI} = \frac{Ox_{3c}/Ox_{3a}}{Ox_{3b}/Ox_{3a}} = \frac{Ox_{3c}}{Ox_{3b}} = \frac{1}{Ox_{3c}/Ox_{3b}} = \frac{1}{D_I^{j*}(x, y)} \quad (8)$$

En resumen, el Índice de brecha tecnológica ( $TGR$ ) que puede interpretarse como un índice de eficiencia potencial ( $PEI$ ) queda definido a partir de la siguiente expresión:

$$TGR = PEI = \frac{1}{D_I^{j*}(x, y)} \quad (9)$$

El Índice de eficiencia potencial ( $PEI$ ) se interpreta como la eficiencia de una ESE potencial en relación con su frontera de grupo. Por su parte, la  $TGR$  mide la distancia relativa entre la frontera grupal y la metafrontera, lo que permite identificar qué tan alejadas se encuentran, por ejemplo, las ESE  $i$  e  $i^2$  respecto de las mejores prácticas del sistema. En este contexto, la metafrontera no evalúa eficiencia técnica per se, sino la capacidad de absorción tecnológica y la alineación estructural con la frontera del sistema en su conjunto.

$$D_I^{j*}(x, y) = \frac{D_I^*(x, y)}{D_I^j(x, y)} \quad (10)$$

$D_I^{j*}$  corresponde a la función de distancia de Shephard con respecto de la ESE potencial en una frontera de grupo específica.

$$MEI = GEI \times PEI \quad (11)$$

Según la ecuación (11), los componentes de la eficiencia relativa a la metafrontera son:

- i) la eficiencia observada respecto a la frontera de grupo, representada por el Índice de Eficiencia Grupal ( $GEI$ ), y
- ii) la eficiencia potencial respecto de dicha frontera, representada por el Índice de Eficiencia Potencial ( $PEI$ ).

En este marco, los aumentos en el índice de metaeficiencia (*MEI*) pueden originarse por mejoras en *GEI*, en *PEI*, o en ambos. Por lo tanto, una ESE puede incrementar su eficiencia relativa a la metafrontera mediante tres mecanismos:

1. Mejorando su eficiencia dentro del grupo (aumento en *GEI*), suponiendo que la brecha tecnológica entre su grupo y la metafrontera permanece constante.
2. Reduciendo la brecha tecnológica entre su frontera de grupo y la metafrontera (aumento en *PEI*), manteniendo constante su eficiencia dentro del grupo.
3. Mejorando simultáneamente su eficiencia específica de grupo y su eficiencia potencial respecto a la metafrontera.

Con base en las funciones de distancia de Shephard definidas en las ecuaciones (3), (4), la *TGR* definida en las ecuaciones (8) y (9) y a partir del crecimiento entre  $t+1$  y  $t$  del Índice de metaeficiencia (*MEI*), en la ecuación (12) se definen el Índice de cambio en eficiencia de metafrontera (*MECI*) y el Índice de cambio tecnológico de metafrontera en función del cambio en las distancias de metafrontera (*MTCI*). A partir del producto entre *MECI* y *MTCI* y teniendo en cuenta las ecuaciones (10) y (11) se define, a nivel de metafrontera, el Índice de crecimiento de productividad de Malmquist de metafrontera (*MMPI*) entre dos periodos de tiempo,  $t$  y  $t+1$  para cualquier ESE  $i$  como:

$$MMPI_{i,t+1,t} = \frac{1/D_I^{*,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{1/D_I^{*,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \times \left[ \frac{D_I^{*,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{D_I^{*,t}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})} \times \frac{D_I^{*,t+1}(x_{i,t}, y_{i,t})}{D_I^{*,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= MECI_{i,t+1,t} \times MTCI_{i,t+1,t} \quad (12)$$

La ecuación (12) indica que las ESE pueden aumentar su productividad (*MMPI*) mediante incrementos en el Índice de cambio en eficiencia de metafrontera y/o con mejoras en el Índice de cambio tecnológico de metafrontera. Ahora, el Índice de productividad Malmquist de frontera de grupo se define a partir de:

$$GMPI_{i,t+1,t} = \frac{1/D_I^{j,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{1/D_I^{j,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \times \left[ \frac{D_I^{j,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{D_I^{j,t}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})} \times \frac{D_I^{j,t+1}(x_{i,t}, y_{i,t})}{D_I^{j,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= GECI_{i,t+1,t} \times GTCI_{i,t+1,t} \quad (13)$$

Este índice permite comparar la productividad de cada ESE respecto a la productividad promedio de su grupo, y es uno de los impulsores del *MMPI* según la ecuación (16).

El índice de cambio en eficiencia de frontera grupal (*GEFI*) evalúa la variación en eficiencia de una ESE respecto a la frontera de eficiencia de su grupo, permitiendo analizar su desempeño relativo y su capacidad de adaptación frente a cambios tecnológicos o del entorno. Por su parte, el índice de cambio tecnológico de frontera de grupo (*GTGI*) mide el desplazamiento de la frontera tecnológica del grupo, reflejando cómo evoluciona la mejor práctica tecnológica dentro de un determinado nivel de complejidad. Mientras el *GEFI* se enfoca en la eficiencia relativa frente a sus pares, el *GTGI* evalúa el grado en que las ESE aprovechan la tecnología disponible para alcanzar la frontera de eficiencia. Este último resulta especialmente útil para comparar unidades que operan bajo condiciones similares y utilizan tecnologías comparables.

Desde la perspectiva de la metafrontera, el segundo impulsor del *MMPI* es el índice de productividad potencial de Malmquist (*PMPI*), cuya formulación se presenta en la ecuación (14):

$$PMPI_{i,t+1,t} = \frac{1/D_I^{j^*,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{1/D_I^{j^*,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \times \left[ \frac{D_I^{j^*,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{D_I^{j^*,t}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})} \times \frac{D_I^{j^*,t+1}(x_{i,t}, y_{i,t})}{D_I^{j^*,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= ECU_{i,t+1,t} \times TCU_{i,t+1,t} \quad (14)$$

El *PMPI* representa el cambio anual en la productividad multifactorial de una ESE potencial o ideal, que opera en la metafrontera tecnológica y de eficiencia. Este índice refleja la recuperación de eficiencia y desatraso tecnológico entre la frontera del grupo y la metafrontera de una ESE, y se calcula como el producto entre el Índice de recuperación de eficiencia (*ECUI*) y el índice de recuperación tecnológica (*TCUI*).

El *ECUI* mide la capacidad de una ESE para recuperar su eficiencia respecto a las mejores prácticas del sistema hospitalario público, en comparación con su desempeño pasado. Se enfoca en la recuperación de eficiencia perdida por factores internos o externos, y resulta útil para evaluar su potencial de mejora a lo largo del tiempo, independientemente de la comparación con otras unidades.

El *TCUI*, por su parte, evalúa el grado en que una ESE se recupera de un atraso tecnológico que la ha alejado de la metafrontera a lo largo del tiempo. Mide el cambio en la brecha tecnológica entre dos períodos, respecto a las mejores prácticas del sistema hospitalario público, es decir, si una unidad ha logrado “recuperar terreno” frente a la mejor tecnología disponible.

A partir de las ecuaciones (13) y (14), se puede redefinir el *MMPI* como el producto de sus cuatro impulsores, según la ecuación (15):

$$\begin{aligned}
 MMPI_{i,t+1,t} &= \frac{1/D_I^{j,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{1/D_I^{j,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \times \frac{1/D_I^{j*,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{1/D_I^{j*,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \\
 &\times \left[ \frac{D_I^{j,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{D_I^{j,t}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})} \times \frac{D_I^{j,t+1}(x_{i,t}, y_{i,t})}{D_I^{j,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[ \frac{D_I^{j*,t+1}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})}{D_I^{j*,t}(x_{i,t+1}, y_{i,t+1})} \times \frac{D_I^{j*,t+1}(x_{i,t}, y_{i,t})}{D_I^{j*,t}(x_{i,t}, y_{i,t})} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= GECl_{i,t+1,t} \times ECUl_{i,t+1,t} \times GTCl_{i,t+1,t} \times TCUI_{i,t+1,t} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Equivalentemente se puede reescribir la ecuación (15) así:

$$MMPI_{i,t+1,t} = GMPI_{i,t+1,t} \times PMPI_{i,t+1,t} \quad (16)$$

E esta manera, *MMPI* se puede ver desde las tres perspectivas diferentes dadas en las ecuaciones (12), (15) y (16).

#### 4.2 Especificación de las funciones de distancia a las fronteras de grupo, a la metafrontera y estrategia de estimación.

Las funciones de distancia orientadas a insumos del índice de productividad Malmquist de metafrontera se pueden estimar con técnicas paramétricas de Frontera Estocástica (SFA) o técnicas no paramétricas, de Análisis envolvente de datos (DEA). Dadas las ventajas de SFA sobre DEA demostradas en la literatura (debido a que DEA no tiene en cuenta el error estocástico, se utiliza SFA desarrollado por Aigner et al. (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977)). Requiere la especificación de una forma funcional para

la tecnología subyacente, por ejemplo, Cobb–Douglas o Translog, la cual debe ser estimada utilizando técnicas tales como Máxima verosimilitud, entre otras.

Las desviaciones o distancias respecto de la frontera estimadas se atribuyen tanto al error estocástico como a la ineficiencia. Se pueden asumir diferentes distribuciones para el término de ineficiencia, tales como la media normal, la exponencial y la normal truncada. En este trabajo se adopta esta última distribución, en coherencia con el enfoque propuesto por Battese y Coelli (1995). Además, debido al uso de dicho enfoque, la forma funcional de las funciones de distancia difiere de la utilizada por Cao et al. (2017).

Con base en el resultado de la prueba de razón de verosimilitud (Tabla 2 del Apéndice C) se seleccionó la forma funcional Translog, en lugar de Cobb Douglas para modelar la tecnología de cada nivel de complejidad. A partir de esta especificación, se formularon las funciones de distancia orientadas a insumos, tanto respecto a la frontera de grupo como a la metafrontera. Para ello se consideraron  $N(i: 1, \dots, N)$  ESE observadas en  $T$  ( $t: 1, \dots, T$ ) periodos de tiempo, así como  $M(m: 1, \dots, M)$  grupos de insumos normalizados;  $K(k: 1, \dots, K)$  grupos de servicios de salud prestados y  $J(j: 1, \dots, J)$  niveles de complejidad y  $S(s: 1, \dots, S)$  variables ambientales que pueden afectar la ineficiencia de cada nivel de complejidad y sobre las cuales las ESE no tienen control.

Dado lo anterior y teniendo en cuenta el resultado de la prueba de razón de verosimilitud sobre identidad de tecnologías de los grupos, se tiene la  $j$ -ésima función de distancia (que difiere en cada nivel en términos de sus parámetros y en las variables que afectan a la ineficiencia):

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{1}{x_{1,it}^j}\right) &= \alpha_0^j + \sum_{k=2}^K \pi_k^j \ln \tilde{x}_{k,it}^j + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^K \sum_{n=2}^K \pi_{kn}^j \ln \tilde{x}_{k,it}^j \ln \tilde{x}_{n,it}^j \\
 &+ \sum_{m=1}^M \xi_m^j \ln y_{m,it}^j y_{mit} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M \beta_{ml}^j \ln y_{m,it}^j \ln y_{l,it}^j + \sum_{k=2}^K \sum_{m=1}^M \phi_{mk}^j \ln \tilde{x}_{k,it}^j \ln y_{m,it}^j \\
 &+ \sum_{k=2}^K \ln \tilde{x}_{k,it}^j t + \sum_{m=1}^M \kappa_m \ln y_{m,it}^j t + \psi_1^j t + \frac{1}{2} \psi_2^j t^2 + v_{it}^j - u_{it}^j
 \end{aligned} \tag{17}$$

Donde: 
$$\tilde{x}_{k,it}^j = \frac{x_{k,it}^j}{x_{1,it}^j} \tag{18}$$

Además:  $\varepsilon_{it}^j = v_{it}^j - \ln(d_{it}^j) = v_{it}^j - u_{it}^j$  y  $u_{it} \sim N^T[\delta_0 + \sum_{s=1}^S \theta_s \ln z_{s,it}^j \sigma^2]$ . En la ecuación (17)  $y_{mit}$  es la  $m$ -ésima cantidad de servicios,  $\tilde{x}_{kit}$  es la  $k$ -ésima cantidad de insumos estandarizados para la  $i$ -ésima ESE en el  $t$ -ésimo año,  $u_{it}$  representa la ineficiencia técnica que sigue una distribución normal truncada (Battese y Coelli, 1995) de manera consistente con el hecho de que la distancia de cada ESE a la frontera de grupo  $u_{it}^j = \ln(D_{it}^j) \geq 0$ , la cual es independiente de  $v_{i,t}^j$ . La misma metodología de Battese y Coelli (1995) considera que la eficiencia técnica derivada del modelo para cada unidad de producción puede estar afectada por un conjunto de variables ambientales,  $z_{s,it}^j$  específicas a cada nivel de complejidad. Adicionalmente otras variables que afectan a la media de la varianza y a la misma varianza de la función de distancia. Los parámetros por estimar de cada función de distancia son:  $\alpha_0, \pi, \gamma, \xi, \beta, \phi, \kappa, \psi, \eta$  y  $\theta$ .

Para llevar a cabo la estimación de los coeficientes de la ecuación (17) se usa la información del panel de datos, entre 2007 y 2021 y de las variables ambientales descritas en la Sección de datos. De la ecuación (17) el  $GEI$  puede ser estimado así:

$$\widehat{GEI}_{i,t}^j = E \left\{ \widehat{exp}(-u_{i,t}^j) | \widehat{\varepsilon}_{i,t}^j \right\} \quad (19)$$

Se estima de manera similar la función de distancia tipo Shephard a la metafrontera, y con ello, se calcula el Índice de Metaeficiencia ( $MEI$ ). Según lo señalado por Cao et al. (2017), existen dos técnicas principales para estimar la tecnología de la metafrontera. La primera es la de Battese et al. (2004) y O'Donnell et al. (2008) que utilizan técnicas de SFA y DEA para estimar la eficiencia del grupo y la de metafrontera, respectivamente. No obstante, indican los autores que este enfoque presenta una inconsistencia metodológica, ya que la primera etapa es determinista mientras que la segunda es estocástica, lo que genera supuestos incompatibles entre la frontera del grupo y la metafrontera.

La segunda técnica, que es la que usan Cao et al (2017), que soluciona dicha inconsistencia, es la de Huang et al. (2014) a partir de 2 etapas y usando SFA en ambas etapas. En la primera etapa se obtienen las distancias estimadas o predichas de cada nivel de complejidad, las cuales se agrupan para conformar la variable dependiente de la distancia a la metafrontera, luego, en la segunda etapa se estiman los parámetros de la metafrontera y la razón de brecha tecnológica  $TGR^j$  (o su equivalente  $PEI^j$ ), en lugar de la eficiencia de metafrontera, la cual se obtiene multiplicando eficiencia de cada grupo por la razón de la

brecha tecnológica. Como resultado, la eficiencia técnica del grupo, la razón de brecha tecnológica y las estimaciones de metafrontera toman un valor entre 0 y 1, lo cual es compatible con la definición de eficiencia.

Con base en lo señalado por Cao et al. (2017), otra desventaja del método propuesto por Battese et al. (2004) y O'Donnell et al. (2008) es el uso de técnicas de programación lineal —al igual que en Du y Lin (2017)— para estimar la eficiencia de la metafrontera. Este enfoque impide calcular directamente intervalos de confianza, niveles de significancia y errores estándar.

Por lo tanto, el enfoque de Huang et al. (2014) resulta más robusto, tal como se señala en Molinos et al. (2023). La representación algebraica que proponen Cao et al. (2017) de dicha extensión inicia retomando las ecuaciones (8) y (9) a partir de las cuales el  $TGR$  se puede escribir como:

$$TGR_{i,t} = PEI_{i,t} = \frac{X1_{i,t} / D_i^*(X1_i, X2_i, X3_i, X4_i, Y1_i, Y2_i, Y3_i)}{X1_{i,t} / D_i^j(X1_i, X2_i, X3_i, X4_i, Y1_i, Y2_i, Y3_i)} = \frac{oX1_{i,t}^*}{oX1_{i,t}^j} \leq 1 \quad (20)$$

Donde  $X1_{i,t}$  es el insumo real y  $oX1_{i,t}^*$ ,  $oX1_{i,t}^j$  denotan el insumo óptimo con respecto a la metafrontera y la frontera de grupo. Al aplicar logaritmo natural en ambos lados se tiene:

$$\ln(1/oX1_{i,t}^j) = \ln(1/oX1_{i,t}^*) - u_{i,t}^{j*} \quad (21)$$

Donde  $-u_{i,t}^{j*} = \ln PEI_{i,t} \leq 0 \rightarrow PEI_{i,t} = e^{-u_{i,t}^{j*}} \leq 1$  por lo tanto la ecuación (17) puede reescribirse como:

$$\ln(1/X1_{i,t}^j) = \ln(1/oX1_{i,t}^j) + \varepsilon_{i,t}^j \quad (22)$$

La ecuación (22) corresponde a la ecuación (17) expresada en forma simplificada. Por lo tanto, el término  $(1/oX1_{i,t}^j)$  denota la parte determinística de la frontera estocástica de grupo, mientras que en la ecuación (21) el término  $\ln(1/oX1_{i,t}^*)$  representa la parte determinística de la metafrontera estocástica.

$$\ln(1/X1_{i,t}^j) = \ln(1/oX1_{i,t}^j) + \varepsilon_{i,t}^j = \ln(\widehat{1/oX1}_{i,t}^j) + \hat{\varepsilon}_{i,t}^j \quad (23)$$

Nota <sup>6</sup> Integrando la ecuación (23) con la (21), se obtiene:

$$\ln(\widehat{1/oX1}_{i,t}^j) = \ln(1/oX1_{i,t}^{j*}) + \varepsilon_{i,t}^{j*} \quad (24)$$

Donde  $\varepsilon_{i,t}^{j*} = v_{i,t}^{j*} - u_{i,t}^{j*}$ ,  $v_{i,t}^{j*} = \varepsilon_{i,t}^j - \widehat{\varepsilon}_{i,t}^{j*}$  y se supone que el término de ineficiencia no negativo se trunca en cero.

$$\widehat{PEI}_{i,t}^j = E \left\{ \exp(-u_{i,t}^{j*}) | \widehat{\varepsilon}_{i,t}^{j*} \right\} = TGR_{i,t}^j \quad (25)$$

Nota7

$$GE\widehat{CI}_{i,t+1,t} = \widehat{GEI}_{i,t+1} / \widehat{GEI}_{i,t}, EU\widehat{CI}_{i,t+1,t} = \widehat{PEI}_{i,t+1} / \widehat{PEI}_{i,t} \quad (26)$$

El índice de cambio tecnológico de frontera de grupo y el índice de recuperación tecnológica se puede estimar:

$$GT\widehat{CI}_{i,t+1,t} = \left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ \widehat{\psi}_{1,t}^j + \widehat{\psi}_{2,t}^j(2t+1) + \widehat{\eta}_{1,t}^j \ln X1_{i,t+1}^j + \widehat{\eta}_{2,t}^j \ln X2_{i,t+1}^j + \widehat{\eta}_{3,t}^j \ln X3_{i,t+1}^j \right. \\ \quad \left. + \widehat{\delta}_{1,t}^j \ln Y1_{i,t+1}^j + \widehat{\delta}_{2,t}^j \ln Y2_{i,t+1}^j + \widehat{\delta}_{3,t}^j \ln Y3_{i,t+1}^j \right] \\ \times \exp \left[ \widehat{\psi}_{1,t}^j + \widehat{\psi}_{2,t}^j(2t+1) + \widehat{\eta}_{1,t}^j \ln X1_{i,t}^j + \widehat{\eta}_{2,t}^j \ln X2_{i,t}^j + \widehat{\eta}_{3,t}^j \ln X3_{i,t}^j \right. \\ \quad \left. + \widehat{\delta}_{1,t}^j \ln Y1_{i,t}^j + \widehat{\delta}_{2,t}^j \ln Y2_{i,t}^j + \widehat{\delta}_{3,t}^j \ln Y3_{i,t}^j \right] \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

$$TU\widehat{CI}_{i,t+1,t} = \left\{ \begin{array}{l} \exp \left[ \widehat{\psi}_{1,t}^* + \widehat{\psi}_{2,t}^*(2t+1) + \widehat{\eta}_{1,t}^* \ln X1_{i,t+1} + \widehat{\eta}_{2,t}^* \ln X2_{i,t+1} + \widehat{\eta}_{3,t}^* \ln X3_{i,t+1} \right] \\ \quad \left. + \widehat{\delta}_{1,t}^* \ln Y1_{i,t+1} + \widehat{\delta}_{2,t}^* \ln Y2_{i,t+1} + \widehat{\delta}_{3,t}^* \ln Y3_{i,t+1} \right] \\ \times \exp \left[ \widehat{\psi}_{1,t}^* + \widehat{\psi}_{2,t}^*(2t+1) + \widehat{\eta}_{1,t}^* \ln X1_{i,t} + \widehat{\eta}_{2,t}^* \ln X2_{i,t} + \widehat{\eta}_{3,t}^* \ln X3_{i,t} \right] \\ \quad \left. + \widehat{\delta}_{1,t}^* \ln Y1_{i,t} + \widehat{\delta}_{2,t}^* \ln Y2_{i,t} + \widehat{\delta}_{3,t}^* \ln Y3_{i,t} \right] \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

## 5. Resultados

<sup>6</sup> En el término  $\ln(\widehat{1/oX1}_{i,t}^j)$  de la ecuación (23) el superíndice corresponde a  $j$  y el subíndice a  $i,t$ . Al sobreponer el circunflejo ^ deja de estar visible el punto de la  $j$  y de la  $i$  haciendo que parezcan una  $J$  y una  $t$ .

<sup>7</sup> El superíndice corresponde a  $j$  y el subíndice a  $i,t$ . Al sobreponer el circunflejo ^ deja de estar visible el punto de la  $j$  y de la  $i$  haciendo que parezcan una  $J$  y una  $t$ .

Antes de estimar el cambio en la productividad de las ESE para cada nivel de complejidad en Colombia, se verificó que los 3 tipos de ESE no compartan la misma tecnología. Por lo tanto, siguiendo a Battese et al. (2004) se usa la prueba de razón de verosimilitud (*LR*) para analizar si la heterogeneidad del grupo es estadísticamente significativa. Para los tres niveles se rechaza la hipótesis nula de identidad de tecnologías y los resultados de la prueba se reportan la Tabla 1 del Apéndice C.

Lo anterior permite capturar la heterogeneidad de los tres niveles en las estimaciones de eficiencia y productividad, evitando así la estimación agregada en una sola función de distancia y el problema de heteroscedasticidad subyacente, tal como en el trabajo de Montoya (2013) en el que agrega los datos de nivel 2 y 3 y estima una sola función de distancia.

En el Cuadro 5 se presentan los principales parámetros estimados, mientras que la Tabla 3 del Apéndice C incluye los coeficientes restantes —incluidos los de las variables ambientales— y sus estadísticas *Z*. Los signos negativos de los coeficientes asociados a los servicios indican que un aumento marginal en la producción, manteniendo constantes los insumos, reduce la distancia a la frontera de eficiencia. Esto sugiere que las ESE pueden mejorar su eficiencia técnica optimizando el uso de recursos existentes, sin necesidad de incrementarlos.

Por el contrario, los coeficientes positivos de los insumos reflejan que un mayor uso de recursos sin un aumento proporcional en la producción incrementa la ineficiencia. Un hallazgo relevante es el signo negativo del coeficiente asociado al número de empleados no pertenecientes al talento humano en salud en las ESE de nivel 3, lo que sugiere que este tipo de personal podría contribuir a reducir la ineficiencia grupal, posiblemente compensando rigideces organizativas o asignaciones subóptimas de funciones.

También se destacan los efectos de las variables ambientales sobre la eficiencia técnica. En particular, el signo positivo y la significancia estadística del parámetro asociado al tamaño institucional, medido como la proporción de activos de la ESE respecto al total el sistema, indican que esta variable está positivamente relacionada con la ineficiencia técnica<sup>8</sup> sugiriendo que las ESE de mayor tamaño tienden a operar con menor eficiencia, lo

---

<sup>8</sup> De acuerdo con la forma funcional propuesta por Battese y Coelli (1995) para modelar la ineficiencia técnica como función de variables ambientales, un coeficiente positivo implica que la variable incrementa la ineficiencia, lo que se traduce en una reducción de la eficiencia técnica.

cual podría reflejar diseconomías de escala, limitaciones en la absorción tecnológica y mayores dificultades en la gestión de procesos complejos. La consistencia de este hallazgo al evaluar la eficiencia frente a la metafrontera refuerza la relevancia del tamaño institucional como factor estructural en el diseño de políticas de fortalecimiento.

**Cuadro 5.**

**Principales coeficientes de las funciones de distancia y de la metafrontera (Translog)**

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Metafrontera
Variable dependiente:	$\ln(1/X1_{it}^j)$			$\ln\left(\frac{1}{\overline{OX1}_{t,t}^j}\right)$ agrupadas
Variables explicativas:				
Ln(y <sub>1</sub> ): Ln(Proc_quirurg_e_interv)	-0.194*** (-28.40)	-0.284*** (-14.19)	-0.605*** (-6.66)	-0.187*** (-133.89)
Ln(y <sub>2</sub> ): Ln(Prc_apoyo_diag_trat)	-0.0577*** (-5.49)	-0.129*** (-4.26)	-0.263 (-1.66)	-0.0596*** (-25.21)
Ln(y <sub>3</sub> ): Ln(consultas_y_preven)	-0.106*** (-8.90)	-0.0676* (-2.30)	-0.309* (-1.97)	-0.0954*** (-36.78)
Ln(x <sub>2</sub> ): Ln(Talento_hum_salud)	0.0530*** (4.9)	0.0938*** (3.95)	0.264*** (3.5)	0.0482*** (20.3)
Ln(x <sub>3</sub> ): Ln(Consultorios_y_mesas)	0.415*** (58.7)	0.363*** (17.81)	1.107*** (8.35)	0.398*** (228.88)
Ln(x <sub>4</sub> ): Ln(Empleados_no_THS)	0.0570*** (5.95)	0.0466* (1.98)	-0.724*** (-5.69)	0.0450*** (21.5)
Media de la Ineficiencia ( $\mu_u$ )				
Activos <sub>i</sub> /Activos total	178.5*** (25.93)	33.70*** (16.57)		
$\ln(\text{Activos } i / \text{Activos total})$			0.459*** (6.14)	
Dummy_covid				-59.21 (-0.39)
Constante	-0.0968*** (-3.90)	0.272*** (6.84)	1.894*** (7.66)	-3931.1* (-2.45)
Media de la varianza ( $\mu_\sigma$ )				
$\Delta \ln(\text{poblac\_municip})$			0.118 -1.46	
Constante	-2.917*** (-45.57)	-4.010*** (-37.58)	-4.208*** (-12.28)	5.466*** (13.37)
Variables que afectan la varianza ( $\nu_\sigma$ )				
Constante	-5.617*** (-68.62)	-6.240*** (-7.02)	-5.459*** (-29.04)	-8.043*** (-199.10)
N	6629	1397	279	8324

Estadísticas *t* en paréntesis

\* p<0.05, \*\* p<0.01, \*\*\* p<0.001

Asimismo, la significancia del parámetro asociado al tamaño institucional en el modelo de metafrontera indica que las ESE más grandes presentan menor capacidad para cerrar la brecha tecnológica respecto de las mejores prácticas del sistema. Esto sugiere que el tamaño institucional no solo afecta la eficiencia técnica relativa, sino también la capacidad de absorción tecnológica y la alineación con estándares óptimos de desempeño.

La integración del enfoque de funciones de distancia con la metafrontera permite evaluar simultáneamente la eficiencia relativa dentro de cada nivel de complejidad y la convergencia hacia las mejores prácticas del sistema hospitalario. Además, introduce la perspectiva de la estructura del recurso humano en salud, administrativo y operativo como determinantes de la eficiencia, un aspecto poco explorado en estudios previos.

El efecto negativo del tamaño de los activos institucionales sobre la eficiencia sistémica abre nuevas líneas de investigación para orientar políticas de consolidación y fortalecimiento de capacidades en ESE pequeñas y medianas.

La estimación diferenciada por niveles de complejidad permite identificar los determinantes estructurales de la eficiencia técnica y de la brecha tecnológica. Mientras las funciones grupales evalúan la eficiencia interna, la metafrontera permite analizar la distancia respecto de las mejores prácticas del sistema.

Los coeficientes más negativos en la metafrontera indican que la producción de servicios tiene un mayor impacto en la reducción de la brecha tecnológica. En contraste, los coeficientes positivos de insumos, especialmente los relacionados con infraestructura física, reflejan que el uso excesivo de recursos sin mejoras tecnológicas penaliza la eficiencia sistémica.

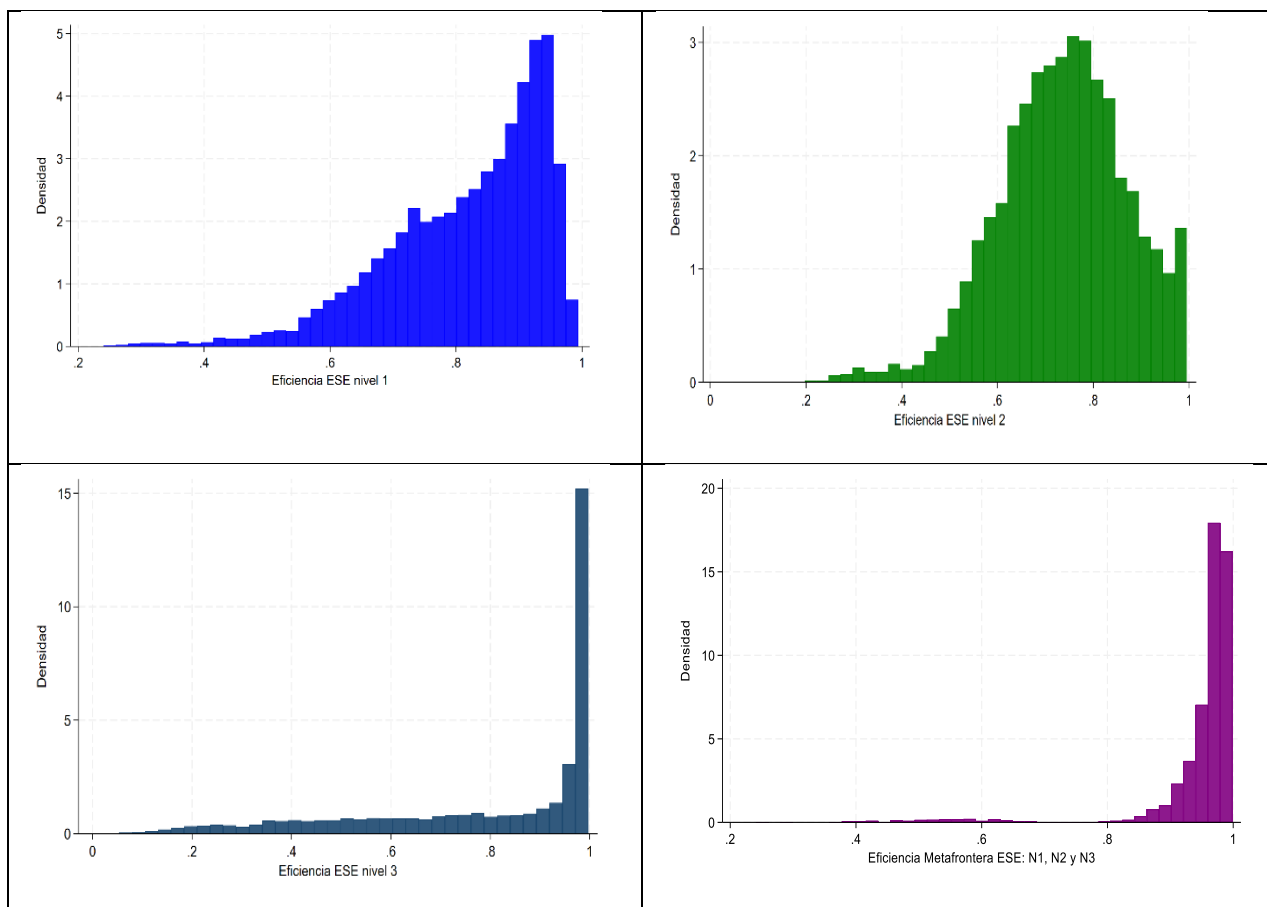
En conjunto, esta comparación revela que los determinantes de la eficiencia técnica y de la brecha tecnológica no operan de manera homogénea entre niveles, y que lo que contribuye a la eficiencia dentro del grupo puede no ser suficiente para reducir la brecha tecnológica a nivel del sistema hospitalario público.

Este hallazgo representa un aporte metodológico y sustantivo a la literatura sobre eficiencia hospitalaria en Colombia, al integrar el enfoque de metafronteras con estimaciones empíricas diferenciadas por nivel, y al identificar variables organizativas que afectan la eficiencia y la brecha tecnológica de manera estructural.

Lo que es eficiente en términos relativos dentro de un nivel de complejidad puede no serlo desde una perspectiva sistémica. Este hallazgo constituye un insumo valioso para el diseño de políticas diferenciadas por nivel de complejidad que permitan frenar la caída continuada de la productividad.

**Gráfico 1**

**Distribuciones de frecuencias de las eficiencias de cada Nivel y de la Metafrontera.**



**Cuadro 6**

**Estadísticas descriptivas de los promedios de eficiencia por nivel de complejidad**

Variable	N	Media	DE	Min	p5	p25	p50	p75	p95	Max
Efic. N1	6629	0.829	0.119	0.285	0.593	0.758	0.863	0.923	0.959	0.986
Efic. N2	1397	0.694	0.11	0.25	0.521	0.625	0.691	0.768	0.876	0.975
Efic. N3	279	0.888	0.109	0.517	0.632	0.842	0.932	0.964	0.98	0.988

Fuente: Cálculos el autor

Los resultados respecto a la eficiencia técnica, según el Gráfico 1 y cuadro 6, son generalmente positivos. Respecto a la metafrontera, la mayoría de ESE tienen niveles superiores a 0.8 con muy alta concentración en valores superiores a este. Desde el punto de vista grupal, las de nivel 3 son las más eficientes, su distribución es altamente concentrada en niveles muy cercanos a 1 que es el óptimo, con una mediana de 0.932 según el Cuadro 3.

A estas les siguen las de nivel 1 con más ESE en niveles de eficiencia entre 0.7 y 0.9, con una mediana de 0.863. El resultado menos favorable es el de las de nivel 2 que tienen la mayor dispersión, con una mediana de 0.691 y menos ESE con eficiencia técnica superior a 0.8. Estas últimas, son las que mayor brecha tienen respecto a la eficiencia técnica potencial de grupo, usando insumos sin disminuir la cantidad de servicios prestados o aumentándolos con la misma cantidad actual de insumos.

Estas estimaciones de eficiencia técnica, por haber sido obtenidas a partir de las funciones de distancia orientadas a insumos, no tienen en cuenta diferencias en la calidad de los servicios de salud prestados. Por lo tanto, no dan razón de mejoras en el estado de salud de los atendidos ni de quejas o reclamos asociados a dichos servicios.

Con base en los coeficientes estimados de la ecuación (17) para cada nivel de complejidad y de metafrontera, siguiendo las ecuaciones (19) y (20) se obtienen:

$$\widehat{GEI}_{i,t}^j = E\{\widehat{exp}(-u_{i,t}^j)|\widehat{\varepsilon}_{i,t}^j\} \quad \text{y} \quad \widehat{PEI}_{i,t}^j = E\{\widehat{exp}(-u_{i,t}^{j*})|\widehat{\varepsilon}_{i,t}^{j*}\} = TGR_{i,t}^j$$

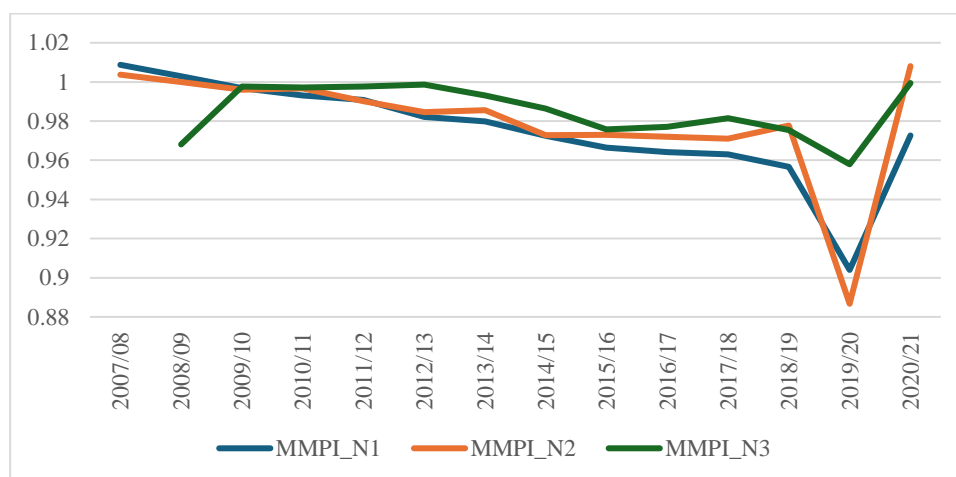
A partir de  $\widehat{GEI}_{i,t}^j$  y  $\widehat{PEI}_{i,t}^j$  y de las ecuaciones (25) a la (28) se estima  $\widehat{MMPI}_{i,t+1,t}$  y sus diferentes impulsores:

$$\widehat{MECI}_{i,t+1,t}, \widehat{MTCI}_{i,t+1,t}, \widehat{GMPI}_{i,t+1,t}, \widehat{PMPI}_{i,t+1,t}, \widehat{GECI}_{i,t,t+1}, \widehat{GTCTI}_{i,t,t+1}, \widehat{ECUI}_{i,t+1,t} \text{ y } \widehat{TCUI}_{i,t+1,t}$$

### **5.1 Evolución de la productividad multifactorial: una caída persistente con matices por nivel.**

El resultado más significativo y preocupante del análisis es la caída persistente de la productividad multifactorial (PTF) en los tres niveles de complejidad hospitalaria, observada en los índices de Malmquist de metafrontera (*MMPI*) presentados En el Gráfico2. Esta tendencia es consistente con lo encontrado en estudios previos como los de Orozco (2020) y Montoya (2013), que documentan una disminución sostenida desde 2002 y 2004, respectivamente. Sin embargo, el presente estudio aporta una perspectiva más profunda al descomponer esta caída en sus componentes estructurales, permitiendo identificar los impulsores específicos de la pérdida de productividad en cada nivel.

**Gráfico 2**  
**Índice de cambio en productividad Malmquist de metafrontera (*MMPI*)**  
**por niveles de complejidad**



En el caso de las ESE de nivel 3, la caída en productividad comienza en 2013, con una pendiente moderada hasta 2016, año en el que se liquida SaludCoop y se producen importantes transformaciones en el sistema, como el aumento en la demanda de servicios y la liquidación de varias ESE. A partir de ese momento, la caída se atenúa, hasta que la pandemia de COVID-19 interrumpe la estabilidad alcanzada. A diferencia de los otros niveles, las ESE de nivel 3 fueron menos afectadas por la emergencia sanitaria, debido a medidas gubernamentales de inversión en infraestructura y fortalecimiento del talento

humano en salud, lo que se refleja en una menor pérdida de eficiencia técnica durante ese periodo.

Las ESE de nivel 2, cuya productividad era similar a la de nivel 1 hasta 2016, muestran una leve recuperación en 2019, pero fueron las más afectadas por la pandemia. No obstante, también presentan la recuperación más fuerte posterior a la crisis, lo que sugiere una mayor capacidad de adaptación operativa. Por su parte, las ESE de nivel 1 exhiben la caída más prolongada e ininterrumpida, con una recuperación postpandemia limitada, lo que sugiere una menor resiliencia institucional y tecnológica.

En conexión con los resultados de la estimación de las funciones de distancia y de la metafrontera. Los coeficientes estimados muestran que, si bien el incremento en la producción de servicios de salud contribuye a reducir la distancia a la frontera que es un componente fundamental de la productividad, el uso de ciertos insumos —como el personal no clínico en nivel 3— puede aumentar la brecha tecnológica y reducir la productividad. Además, el tamaño institucional aparece como un factor estructural que favorece la eficiencia y, con ello, la productividad, lo que puede ayudar a entender por qué las ESE más grandes, especialmente en nivel 3, lograron compensar parcialmente la caída en productividad durante la pandemia.

En conjunto, estos hallazgos permiten concluir que la caída en productividad no responde únicamente a factores coyunturales, sino que está asociada a limitaciones estructurales en la capacidad de las ESE para alinearse con las mejores prácticas del sistema. La descomposición de los índices *MMPI* mediante contribuciones de Shapley, como se verá, confirma que los principales impulsores negativos son el deterioro en el cambio tecnológico (*TCUI*) y el cambio tecnológico grupal (*GTCl*), mientras que la recuperación de eficiencia (*ECUI*) ha tenido un efecto compensatorio, especialmente en nivel 3. Esto refuerza la necesidad de diseñar políticas diferenciadas que aborden tanto la eficiencia técnica como la brecha tecnológica, reconociendo las particularidades de cada nivel de complejidad y las capacidades institucionales de cada ESE.

## **5.2 Descomposición de la productividad: contribuciones de Shapley de sus impulsores.**

Para comprender mejor esta dinámica, se analizó la evolución del Índice de productividad Malmquist de metafrontera (*MMPI*) desde dos perspectivas complementarias: i) La descomposición en sus dos impulsores principales: el índice de productividad de frontera de grupo (*GMPI*) y el índice de productividad potencial (*PMPI*), este último asociado a la metafrontera y ii) El producto entre los cuatro componentes que explican el cambio en productividad: recuperación de eficiencia (*ECUI*), recuperación tecnológica (*TCUI*), eficiencia grupal (*GECI*) y cambio tecnológico grupal (*GTCD*).

Los resultados de las contribuciones de Shapley<sup>9</sup> permiten identificar con precisión qué componente ha influido más en la dinámica de la productividad en cada año. En el Gráfico<sup>3</sup>, se observa que el *GMPI* ha sido el principal impulsor negativo de la caída en productividad durante la pandemia, especialmente en los niveles 2 y 3. Esto refleja la dificultad de estas ESE para mantener constante el volumen de insumos mientras prestan la misma cantidad de servicios, siendo más crítico en el nivel 2, que no muestra signos de recuperación sostenida.

En el caso de las ESE de nivel 1, el *PMPI* es el componente con mayor poder explicativo en la caída del *MMPI*, lo que indica un alejamiento creciente de la metafrontera. Es decir, estas ESE están perdiendo productividad en relación con la mejor tecnología disponible en el sistema hospitalario.

### **5.3 Implicaciones de los impulsores tecnológicos y de eficiencia.**

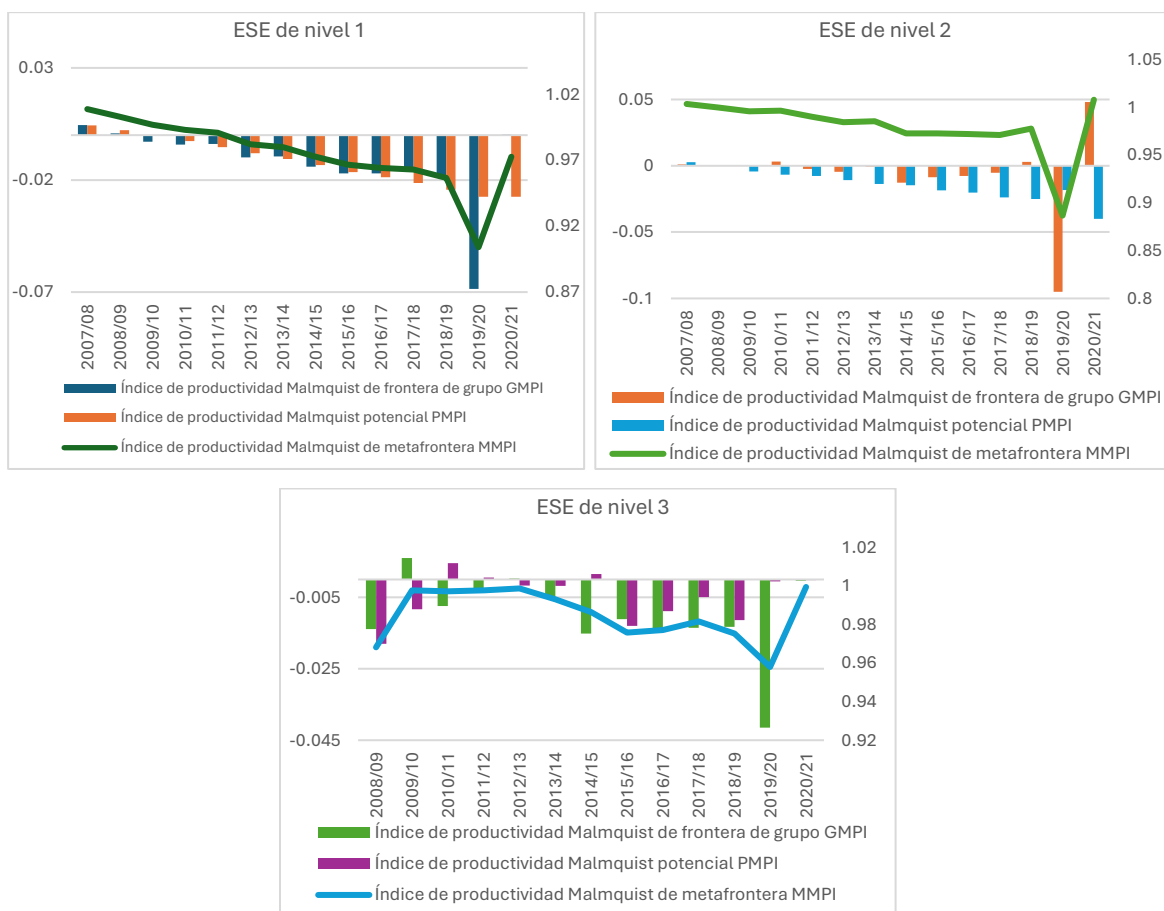
Desde el punto de vista de la primera perspectiva de análisis del índice de productividad Malmquist de metafrontera, el producto entre la productividad de frontera de grupo (*GMPI*) y la productividad potencial respecto a la metafrontera (*PMPI*). Estas dos perspectivas resultan más informativas que la segunda, ya que permiten identificar con precisión el peso relativo de cada determinante en la dinámica del *MMPI*, mide la evolución de la productividad de una ESE o de todas las del cierto nivel respecto a la mejor tecnología disponible en el sistema (la metafrontera).

---

<sup>9</sup> Se aplica el cálculo de las contribuciones de Shapley debido a que *MMPI* resulta del producto entre sus determinantes, algunos de los cuales presentan valores negativos y/o menores a 1. Por lo tanto, no es factible aplicar otra fórmula de contribución aditiva que, además, requiera el uso del logaritmo natural.

**Gráfico 3**

**Mediana del Índice de cambio en productividad Malmquist de metafrontera (MMPI) y la contribución Shapley de sus impulsores GMPI y MMPI**



En el Gráfico3 se muestra la evolución anual de la mediana del *MMPI* para cada nivel de complejidad, junto con las contribuciones de Shapley (1951) de sus dos impulsores principales: *GMPI* y *PMPI*. La suma de estas contribuciones en cada año equivale al valor del *MMPI*, lo que permite identificar con claridad cuál de los dos factores explica más la variación en productividad. Esta descomposición supera las limitaciones de observar únicamente los niveles individuales de cada índice, al cuantificar su impacto relativo en cada periodo. El detalle metodológico de esta construcción se presenta en el Apéndice B.

**Gráfico 4.**

**Mediana de índice Malmquist de cambio en productividad de metafrontera (MMPI) y la contribución Shapley de sus impulsores (eficiencia y el cambio técnico).**



El resultado más notorio es el efecto preponderante del *GMPI* en la caída continuada de la productividad multifactorial durante la pandemia, especialmente en los niveles 2 y 3. Esto indica que estas ESE enfrentaron dificultades para mantener constante el volumen de insumos mientras sostenían la producción de servicios, lo que refleja una pérdida de eficiencia técnica interna. En el nivel 2, esta caída fue más pronunciada y persistente, sin señales claras de recuperación. En contraste, para las ESE de nivel 1, el

PMPI es el componente con mayor poder explicativo en la caída del *MMPI*, lo que evidencia un deterioro en su productividad respecto a la mejor tecnología disponible en el sistema, es decir, un alejamiento creciente de la metafrontera.

En el Gráfico4 se observa que los dos principales impulsores de la tendencia decreciente del índice de cambio de productividad Malmquist de metafrontera en los tres niveles de complejidad son, en orden de magnitud, el *TCUI* y el *GTCI*, cuyas contribuciones negativas de Shapley son cada vez más pronunciadas.

El *ECUI* ha contribuido positivamente en el nivel 3, mostrando mejoras en eficiencia respecto a su desempeño histórico y evitando una caída mayor en el *MMPI*. En los niveles 1 y nivel 2, su aporte es imperceptible, mientras que en el nivel 3 es relativamente significativo. Sin embargo, en ningún caso este componente logra compensar la contribución negativa de los impulsores tecnológicos. En cuanto al *GECI*, su contribución promedio durante el período es positiva pero muy baja en los tres niveles, con algunos episodios en los que ha contribuido negativamente a la productividad.

Por otro lado, desde la perspectiva de la descomposición del índice de productividad Malmquist de metafrontera en sus cuatro componentes estructurales, el Gráfico 4 muestra que el índice de recuperación de eficiencia (*ECUI*) ha tenido un efecto positivo en los niveles 1 y 3, especialmente en este último, donde ayudó a mitigar la caída en productividad durante la pandemia. En el nivel 2, su aporte fue prácticamente nulo.

El índice de eficiencia grupal (*GECI*) presenta una contribución promedio positiva pero baja en todos los niveles, con episodios en los que incluso ha tenido un efecto negativo sobre la productividad.

En conjunto, estos resultados sugieren que las ESE han realizado esfuerzos por mejorar su eficiencia técnica, particularmente las de nivel 3. No obstante, la creciente debilidad en los componentes tecnológicos —el índice de actualización tecnológica (*TCUI*) y el índice de cambio tecnológico de frontera de grupo (*GTCI*)— ha generado un alejamiento sostenido de la frontera tecnológica global, ampliando la brecha respecto a las mejores prácticas disponibles.

El impacto de la pandemia sobre la productividad fue heterogéneo: mientras las ESE de nivel 3 lograron compensar parcialmente la caída mediante mejoras en eficiencia,

las de niveles 1 y 2 enfrentaron un deterioro simultáneo en todos los componentes del *MMPI*.

De lo anterior se concluye que, si bien las ESE han hecho esfuerzos por mejorar su eficiencia técnica —principalmente las de nivel 3—, la creciente debilidad en el *TCUI* las ha alejado progresivamente de la frontera tecnológica global, incrementando la brecha respecto a la mejor tecnología disponible. Además, los resultados del *GTCI* evidencian que las ESE, en todos los niveles, son cada vez menos eficientes en relación con las mejores prácticas tecnológicas del grupo al que pertenecen.

Finalmente, el efecto de la pandemia sobre la productividad de las ESE de nivel 3 fue parcialmente compensado por mejoras en eficiencia, mientras que en los niveles 1 y 2 se observó un deterioro simultáneo en los cuatro componentes que explican la dinámica del *MMPI* durante la crisis sanitaria.

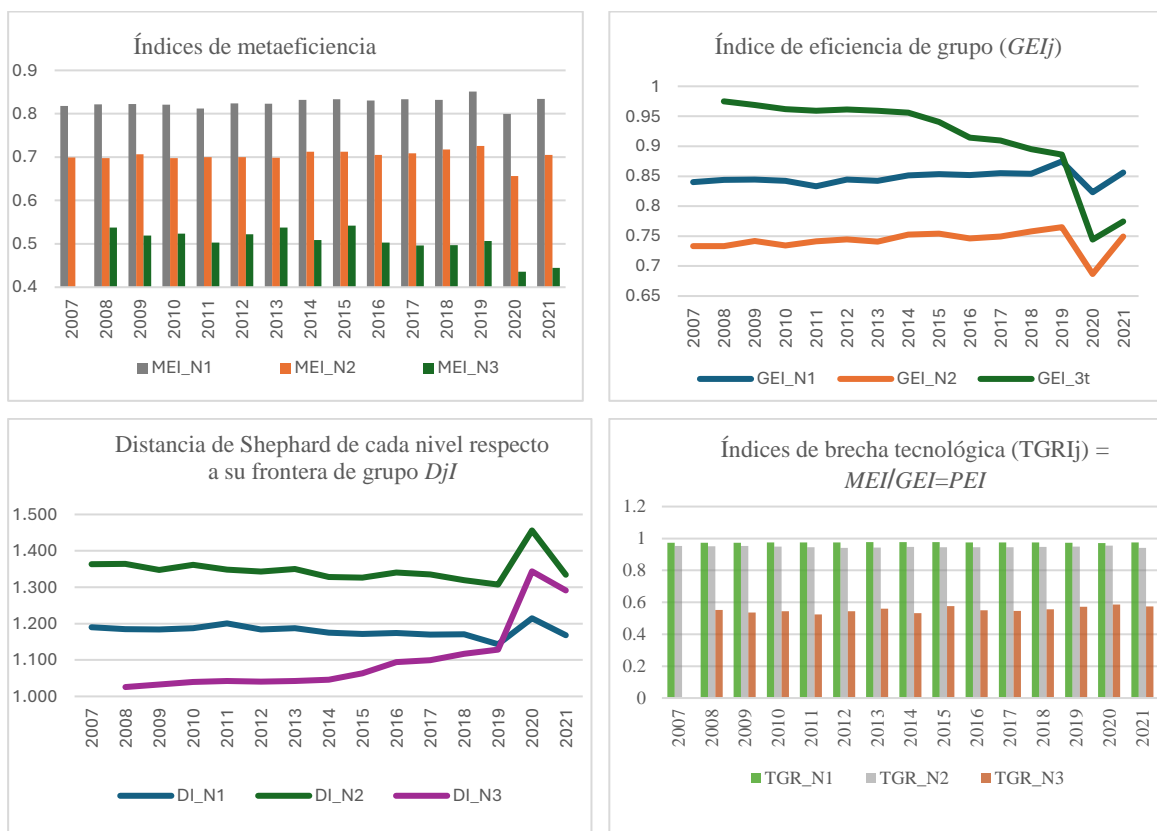
#### **5.4 Oportunidades de mejora en eficiencia: evidencia desde la metaeficiencia.**

En primer lugar, los resultados del Gráfico 5 muestran que todos los índices de metaeficiencia se encuentran por debajo de 1.0, lo que indica que ninguna ESE ha alcanzado el máximo potencial de eficiencia disponible en el sistema hospitalario colombiano. Dado que este índice es el inverso de la distancia a la metafrontera, un valor más cercano a 1 representa una mayor eficiencia relativa respecto a las mejores prácticas de todo el sistema.

Sin embargo, los resultados muestran que las ESE de nivel 3, a pesar de ser las más eficientes dentro de su grupo (menor distancia a la frontera de grupo), presentan los índices de metaeficiencia más bajos, lo que indica que están más alejadas de la metafrontera que las ESE de niveles 1 y 2. Este hallazgo revela una paradoja aparente: las unidades más eficientes dentro de su nivel son, al mismo tiempo, las que menos se aproximan a las mejores prácticas del sistema en su conjunto. Esto sugiere que las ESE de nivel 3 podrían beneficiarse significativamente de la adopción de tecnologías o prácticas utilizadas por otras unidades más avanzadas del sistema, lo que abre un margen importante de mejora en eficiencia sistémica incluso para las instituciones de mayor complejidad.

**Gráfico 5**

**Medianas de los determinantes de la evolución de la productividad y eficiencia.**



Si bien es cierto que las ESE de niveles 1 y 2 representan la mayoría del universo hospitalario público en Colombia y atienden a un volumen significativamente mayor de pacientes, el índice de metaeficiencia no se ve directamente afectado por el tamaño de la muestra o el número de unidades por nivel. Este índice se calcula como el inverso de la distancia a la metafrontera, que representa la frontera común de mejores prácticas para todo el sistema, independientemente del nivel de complejidad.

Lo que sí puede ocurrir es que, al haber más unidades en los niveles 1 y 2, exista mayor diversidad de prácticas y tecnologías que se acerquen a la metafrontera, lo que permite que algunas ESE de estos niveles logren índices de metaeficiencia más altos. En cambio, las ESE de nivel 3, aunque son más eficientes dentro de su grupo, pueden estar más alejadas de las mejores prácticas sistémicas, especialmente si operan con estructuras rígidas, tecnologías especializadas o modelos de atención menos adaptables.

Conviene aclarar que este resultado no es un artefacto estadístico, sino una manifestación estructural del sistema hospitalario: las ESE de nivel 3 pueden estar atrapadas en modelos de operación que, aunque eficientes en su contexto, no se alinean con las prácticas más eficientes del sistema en su conjunto. Por tanto, el hallazgo refleja una oportunidad real de mejora sistémica, incluso para las instituciones más complejas.

### **5.5 Evolución diferenciada de la eficiencia: una lectura desde las fronteras de grupo y la metafrontera.**

En segundo lugar, los índices de eficiencia de frontera de grupo y su inverso (las distancias de Shephard a las fronteras grupales) permiten observar una evolución diferenciada en la eficiencia de las ESE según su nivel de complejidad. Las ESE de niveles 1 y 2 han mostrado una recuperación en eficiencia desde 2011, mientras que las de nivel 3, que históricamente han sido las más eficientes dentro de su grupo, han experimentado una pérdida progresiva de eficiencia. Sin embargo, al examinar la eficiencia al interior de cada grupo mediante las distancias de Shephard, se observa que las ESE de nivel 3 mantienen la mayor eficiencia grupal (menor distancia a la frontera) y presentan una tendencia a mejorar. Por el contrario, las ESE de nivel 1, aunque han recuperado eficiencia general, muestran un deterioro en eficiencia grupal, al igual que las de nivel 2.

Este análisis se vuelve aún más revelador al contrastarlo con los índices de metaeficiencia, que muestran que las ESE de nivel 3, a pesar de su eficiencia grupal, son las que están más alejadas de la metafrontera. Es decir, operan eficientemente dentro de su contexto, pero no necesariamente alineadas con las mejores prácticas del sistema hospitalario en su conjunto. Este hallazgo sugiere que las estrategias de mejora deben ser diferenciadas no solo por nivel de complejidad, sino también por su posición relativa frente a la metafrontera. Se requiere fortalecer capacidades dentro de cada grupo, especialmente en los niveles 1 y 2, pero también promover procesos de innovación y adopción tecnológica en las ESE de nivel 3 para acercarlas a la frontera sistémica.

### **5.6 Brecha tecnológica persistente: un obstáculo estructural para la eficiencia sistémica.**

Finalmente, las razones de brecha tecnológica presentadas En el Gráfico5 evidencian un atraso tecnológico persistente en las ESE de niveles 1 y 2, cuya magnitud es aproximadamente el doble que la observada en las ESE de nivel 3, y se mantiene constante desde 2007 hasta 2021. Aunque es esperable que las ESE de nivel 3, por la naturaleza y alcance de sus servicios, demanden mayor inversión tecnológica, la diferencia en brecha tecnológica resulta excesiva. Esto indica que las ESE de niveles inferiores podrían mejorar significativamente su eficiencia si adoptaran tecnologías más avanzadas disponibles en el sistema.

La menor brecha tecnológica de las ESE de nivel 3 es coherente con su eficiencia grupal, pero contrasta con su baja metaeficiencia, lo que sugiere que estas instituciones, aunque cercanas a su frontera interna, aún tienen margen de mejora respecto a la frontera sistémica. En síntesis, las ESE de niveles 1 y 2 enfrentan una brecha superior al 40% respecto a las de nivel 3, lo que evidencia un amplio margen de mejora mediante la adopción de tecnologías adecuadas a su nivel de complejidad.

Este hallazgo tiene implicaciones importantes para la formulación de políticas públicas. La persistencia de brechas tecnológicas elevadas en los niveles inferiores puede perpetuar desigualdades en la calidad y eficiencia de los servicios prestados, especialmente en regiones con menor capacidad instalada. Además, limita la capacidad de respuesta del sistema ante emergencias sanitarias o cambios en la demanda.

Para revertir esta situación, es necesario diseñar estrategias diferenciadas de inversión en tecnología, que consideren las particularidades de cada nivel de complejidad y promuevan la transferencia tecnológica desde hospitales más avanzados. Asimismo, se requiere fortalecer los mecanismos de evaluación tecnológica y planificación estratégica en las ESE, de modo que las decisiones de inversión estén alineadas con las necesidades reales de los servicios y con criterios de costo-efectividad. Finalmente, el cierre de la brecha tecnológica debe ir acompañado de procesos de formación y actualización del talento humano, para asegurar una apropiación efectiva de las nuevas herramientas y prácticas clínicas.

## **5.7 Relación entre productividad y calidad hospitalaria**

Los estudios de eficiencia y productividad hospitalaria tradicionalmente incluyen la calidad como variable explicativa o de ajuste, dado que la productividad y la eficiencia técnica o económica no siempre refleja el valor real del servicio prestado si se ignoran dimensiones como la experiencia del paciente o los resultados clínicos. Esta inclusión busca, generalmente, evitar sesgos por “eficiencia sin calidad”, es decir, situaciones en las que una institución parece eficiente por producir más servicios con menos recursos, pero lo hace a costa de tiempos de espera excesivos, atención superficial, insatisfacción del paciente o peores desenlaces clínicos. Además, la literatura señala que incorporar la calidad permite capturar mejor el valor real del servicio, ya que la productividad multifactorial (PTF) mide el cambio en la producción ajustada por insumos, pero si dicha producción no incorpora calidad, puede subestimarse el desempeño de hospitales que atienden con mayor cuidado, logran mejores resultados clínicos o generan mayor satisfacción.

Sin embargo, en el contexto colombiano, los hospitales públicos operan bajo condiciones institucionales que limitan su capacidad de decisión sobre el volumen de servicios prestados, lo que plantea desafíos metodológicos al momento de estimar eficiencia técnica y el índice Malmquist de crecimiento en la productividad multifactorial mediante funciones de distancia a la metafrontera estocástica de producción. A diferencia de las firmas privadas, los hospitales públicos no controlan directamente la demanda, ya que el número de pacientes que deben atender les es asignado por las EPS en función de la afiliación y la distribución territorial de la UPC. Esta asignación exógena implica que el volumen de producción no es una decisión interna del hospital, sino una respuesta obligada a una demanda impuesta. Por tanto, modelar simultáneamente la producción de servicios hospitalarios y la calidad como si fueran decisiones conjuntas puede inducir errores de especificación y sesgos en la estimación de eficiencia técnica.

Aunque los hospitales públicos no controlan la demanda, sí tienen cierto margen de maniobra sobre los insumos, como el personal del talento humano en salud (THS y no THS), la capacidad instalada y los equipos disponibles. Esto sugiere que el análisis de eficiencia técnica y productividad debe centrarse primordialmente en cómo se utilizan estos recursos —con un personal cada vez más calificado y una infraestructura en proceso de modernización— para responder a una demanda creciente. A lo anterior se suma que el

sistema de financiación vía UPC no premia directamente la calidad, y los recursos adicionales provenientes del Presupuesto General de la Nación o de fuentes territoriales tampoco están condicionados por indicadores de calidad clínica o administrativa. En consecuencia, la calidad no puede considerarse un producto directo del proceso productivo hospitalario, sino un resultado influido por factores externos como la gestión institucional, la cultura organizacional, la modernización tecnológica, la capacitación del talento humano y las restricciones presupuestales.

Por estas razones, en lugar de incorporar la calidad como una variable explicativa en las funciones de distancia a las fronteras estocásticas de grupo y a la metafrontera, resulta más adecuado analizar de manera *ex post* la relación entre productividad y eficiencia técnica con algunos indicadores de calidad. Además, otro ejercicio valioso y recurrentemente utilizado en la literatura es calcular la productividad corregida por un índice agregado de calidad. Estos enfoques permiten evitar problemas de endogeneidad y mantener la validez del modelo de producción bajo las restricciones reales del sistema hospitalario público. Asimismo, facilitan la identificación de posibles efectos de la calidad sobre la eficiencia técnica y la productividad, sin asumir que los hospitales deciden simultáneamente cuánto producir y con qué calidad. En síntesis, separar la estimación de eficiencia técnica de la evaluación del impacto de la calidad permite una interpretación más precisa y útil para el diseño de políticas públicas orientadas a mejorar el desempeño integral del sistema de salud.

Dado lo anterior, se construyó un índice de calidad hospitalaria —cuya metodología se detalla en el Apéndice C— para ajustar los índices Malmquist de cambio en productividad (*MMPI*) a partir de los siguientes indicadores: i) días de espera para ser atendido mediante citas de medicina general, ii) días de espera para ser atendido mediante citas de odontología, y iii) proporción de pacientes satisfechos con los servicios recibidos. A partir de este índice, se presentan los resultados de los percentiles estimados de la distribución del *MMPI* sin ajustar y ajustado por calidad.

Los resultados descriptivos presentados en el Cuadro 7 muestran que, en promedio, los hospitales de nivel 3 presentan un crecimiento ligeramente superior en la productividad multifactorial ajustada por calidad (media de 0.991) en comparación con los de nivel 1 (0.974) y nivel 2 (0.980), lo cual es consistente con su mayor capacidad instalada y

especialización. Al comparar estos valores con los índices sin ajustar, se observa que las medias son similares, pero los valores extremos del índice sin ajustar son más dispersos, especialmente en el nivel 1, donde el valor máximo alcanza 4.895, lo que sugiere posibles distorsiones por casos atípicos o por no considerar la calidad en la medición.

**Cuadro 7**  
**Estadísticas descriptivas para el índice Malmquist ajustado y sin ajustar por índice de calidad**

Variable	Media	SD	Min	p5	p25	p50	P75	P95	Max
<b>Ajustado</b>									
<i>MMPI_aj_N1</i>	0.974	0.082	0.573	0.847	0.938	0.973	1.008	1.097	1.724
<i>MMPI_aj_N2</i>	0.980	0.082	0.651	0.848	0.940	0.982	1.018	1.102	1.466
<i>MMPI_aj_N3</i>	0.991	0.086	0.640	0.856	0.958	0.988	1.020	1.131	1.439
<b>Sin ajustar</b>									
<i>MMPI N1</i>	0.975	0.090	0.521	0.857	0.947	0.974	1.003	1.086	4.895
<i>MMPI N2</i>	0.979	0.076	0.655	0.855	0.947	0.984	1.012	1.093	1.506
<i>MMPI N3</i>	0.992	0.085	0.642	0.864	0.960	0.989	1.020	1.133	1.436

El ajuste por calidad reduce esta dispersión y permite una interpretación más robusta del desempeño productivo, al eliminar la posibilidad de que hospitales con bajos estándares de atención aparezcan como altamente productivos. En conjunto, estos resultados respaldan la utilidad de incorporar la calidad como factor de corrección en el análisis de productividad, especialmente en sistemas donde la eficiencia técnica no necesariamente refleja el valor integral del servicio prestado.

Teniendo en cuenta que los resultados anteriores evidencian una posible relación relevante entre el índice Malmquist de cambio en productividad multifactorial (*MMPI*) y la calidad de los servicios hospitalarios, se estimó dicha relación mediante un modelo de panel con efectos fijos<sup>10</sup> por nivel de complejidad y año, cuyos resultados se presentan en el Cuadro 8.

<sup>10</sup> La elección del modelo de efectos fijos se fundamenta en los resultados de la prueba de Hausman, la cual compara la consistencia de los estimadores entre los modelos de efectos fijos y aleatorios. En este caso, el valor de  $\chi^2(14) = 33.92$  con un p-valor de 0.0021 indica que se rechaza la hipótesis nula de que las diferencias entre los coeficientes no son sistemáticas. Esto sugiere que los efectos individuales están correlacionados con las variables explicativas, lo que hace que el modelo de efectos aleatorios sea inconsistente. Por tanto, se opta por el modelo de efectos fijos, que proporciona estimaciones robustas y consistentes bajo estas condiciones.

### Cuadro 8

#### Estimación de la relación entre la el índice *MMPI* y variables de calidad.

#### Modelo de panel de efectos fijos de nivel y de tiempo.

Variable	Coefficiente	Error estándar	t	p-valor	IC 95%
Dias_espera_med_general	-3.13E-08	1.28E-08	-2.45	0.014	[-5.64e-08, -6.24e-09]
Dias_espera_odonto	5.07E-08	2.13E-08	2.38	0.017	[8.95e-09, 9.25e-08]
Porcentaje de satisfechos	-0.0342	0.0127	-2.69	0.007	[-0.0591, -0.0093]
	0.1740	0.0095	18.38	0	[0.1554, 0.1925]
Dummie covid	0.0689	0.0060	11.58	0	[0.0573, 0.0806]
			-		
$t$	-0.0113	0.0009	12.94	0	[-0.0130, -0.0096]
$t^2$	-0.1978	0.0763	-2.59	0.01	[-0.3474, -0.0482]
Nivel 2	omitido				
Nivel 3 (omitido)	-0.0646	0.0068	-9.46	0	[-0.0780, -0.0512]
año 2008	-0.1104	0.0095	-11.58	0	[-0.1291, -0.0917]
año 2009	-0.1401	0.0120	-11.7	0	[-0.1635, -0.1166]
año 2010	-0.1512	0.0138	-10.97	0	[-0.1782, -0.1242]
año 2011	-0.1726	0.0148	-11.66	0	[-0.2016, -0.1436]
año 2012	-0.1728	0.0150	-11.51	0	[-0.2022, -0.1434]
año 2013	-0.1648	0.0144	-11.43	0	[-0.1930, -0.1365]
año 2014	-0.1462	0.0130	-11.27	0	[-0.1716, -0.1208]
año 2015	-0.1073	0.0107	-9.98	0	[-0.1284, -0.0863]
año 2016	-0.0592	0.0079	-7.52	0	[-0.0746, -0.0437]
año 2017	omitido				
año 2018 (omitido)	omitido				
año 2019 (omitido)	omitido				
año 2020 (omitido)	1.014971	0.0186114	54.53	0	[0.9785, 1.0515]
sigma_u	0.07586				
sigma_e	0.08351				
Fracción de la de var. debida a $u_i$	0.45208				
Estadística F para probar que todo $u_i = 0$ : $F(667, 6806) = 0.78$ - Prob > $F = 1.0000$					

Según los resultados del Cuadro 8, el coeficiente negativo asociado a la proporción de pacientes satisfechos en el modelo de productividad multifactorial (PTF) adquiere mayor sentido cuando se considera la tendencia decreciente del índice, explicada por un atraso tecnológico persistente y una eficiencia técnica que no logra compensarlo. En un sistema hospitalario donde no se adoptan nuevas tecnologías, procesos o sistemas de gestión, y donde la eficiencia mejora lentamente, los hospitales podrían estar compensando esta falta

de avance con mejoras en la atención al paciente. Sin embargo, estas mejoras —como mayor tiempo por consulta, más personal por paciente o procesos más personalizados— no se traducen directamente en mayor productividad medida en términos de output por insumo. En este contexto, es esperable que se observe una relación negativa entre satisfacción y crecimiento de la PTF, especialmente si el índice captura más la eficiencia técnica y tecnológica que la calidad percibida.

El modelo de efectos fijos confirma esta relación al mostrar que la proporción de pacientes satisfechos tiene un efecto negativo y estadísticamente significativo sobre la productividad (coef. = -0.0342;  $p = 0.007$ ), lo cual puede interpretarse como un trade-off entre calidad percibida y eficiencia técnica. Además, se observa que los mayores tiempos de espera en medicina general se asocian con menor productividad (coef. = -3.13e-08;  $p = 0.014$ ), mientras que en odontología el efecto es positivo (coef. = 5.07e-08;  $p = 0.017$ ), lo que sugiere diferencias operativas entre servicios. Los hospitales de nivel 2 presentan menor productividad que los de nivel 3 (grupo de referencia), y las variables temporales muestran una caída estructural desde 2008 en adelante, con coeficientes negativos y altamente significativos, lo que refuerza la idea de que el sistema enfrenta limitaciones persistentes que afectan tanto la productividad como la calidad.

Por otro lado, los resultados del modelo indican que aproximadamente el 45.2% de la varianza total en el índice de productividad se debe a diferencias específicas entre hospitales que no cambian en el tiempo, como infraestructura o ubicación ( $\rho = 0.452$ ). Sin embargo, la prueba F para evaluar la significancia de estos efectos individuales arroja un valor de  $F(667, 6806) = 0.78$  con un p-valor de 1.0000, lo que sugiere que no se rechaza la hipótesis nula de que todos los efectos individuales son iguales a cero. Esto implica que, en este modelo específico, las diferencias entre hospitales no explican de manera significativa la variación en la productividad, lo que podría justificar explorar modelos alternativos dinámicos. Además, aunque la significancia estadística de los coeficientes indica que las relaciones observadas son consistentes en los datos, no necesariamente implican causalidad, por lo que deben interpretarse con cautela, reconociendo tanto sus implicaciones empíricas como sus limitaciones metodológicas.

En conjunto, los resultados del análisis muestran que existe una relación significativa entre la calidad percibida por los usuarios y el comportamiento del índice

Malmquist de cambio en la productividad multifactorial en hospitales públicos. La inclusión de variables como los días de espera en medicina general y odontología, así como la proporción de pacientes satisfechos, permite identificar tensiones entre eficiencia técnica y calidad del servicio. El efecto negativo de la satisfacción sobre la productividad, junto con la tendencia decreciente del índice Malmquist, sugiere que los hospitales cualquier mejora en la atención que incremente la satisfacción de los pacientes se traduce en menores niveles de productividad (menos pacientes atendidos y menos servicios) debido a al atraso tecnológico y unos niveles de eficiencia que no lo compensan.

Estos hallazgos sugieren la conveniencia del ajuste de los indicadores de productividad por calidad y de considerar enfoques metodológicos que reconozcan las restricciones estructurales del sistema hospitalario público colombiano, para lograr una evaluación más integral del desempeño institucional.

## **6. Conclusiones.**

Los hospitales públicos en Colombia enfrentan desafíos estructurales que comprometen su sostenibilidad, entre ellos la presión financiera, la baja inversión en tecnología y las debilidades en el talento humano. Estos problemas se han visto agravados por reformas que no han cumplido sus objetivos y por eventos como la pandemia, afectando directamente la eficiencia y productividad del sistema hospitalario. En este contexto, mejorar la productividad no es solo una meta técnica, sino una necesidad estratégica para garantizar la equidad y la viabilidad del sistema de salud.

El estudio aporta evidencia empírica desagregada por niveles de complejidad sobre los determinantes de la productividad y las brechas tecnológicas, superando limitaciones metodológicas de investigaciones previas. Se destaca que un aumento en la producción de servicios de salud, sin incrementar los insumos, reduce la distancia a la frontera de eficiencia, lo que indica que las ESE pueden mejorar su desempeño mediante una mejor gestión de los recursos existentes.

Sin embargo, no todo aumento de los insumos manteniendo constante la producción contribuyen positivamente a la ineficiencia de las ESE. Para de nivel tres, el aumento de personal no clínico se asocia con una menor distancia a la metafrontera, lo que sugiere que

la composición del recurso humano puede afectar positivamente la eficiencia. Además, se observa que las ESE más grandes tienden a ser menos eficientes, lo que evidencia la existencia de deseconomías de escala y una menor capacidad para absorber tecnología y gestionar procesos complejos a medida que aumenta el tamaño. La productividad multifactorial ha mostrado una caída sostenida en los tres niveles de complejidad, intensificada por la reorganización del sistema en 2016 y la pandemia. Las ESE de nivel 3 han sido más resilientes, mientras que las de nivel 2 sufrieron el mayor impacto, pero también la recuperación más fuerte. Las de nivel 1 presentan la caída más prolongada y con menor recuperación.

La descomposición del índice *MMPI* revela que el deterioro tecnológico, tanto sistémico (*TCUI*) como grupal (*GTCl*), es el principal factor negativo, mientras que la recuperación de eficiencia (*ECUI*) ha tenido un efecto compensatorio limitado. Los resultados confirman que la eficiencia está influida por la composición del recurso humano y el tamaño institucional, factores clave para cerrar la brecha tecnológica. Una paradoja estructural se evidencia al comparar los índices de eficiencia grupal y metaeficiencia: las ESE de nivel 3, aunque eficientes dentro de su grupo, presentan baja metaeficiencia respecto al sistema hospitalario en su conjunto. Esto sugiere que su caída en productividad no se debe a limitaciones tecnológicas, sino a una menor alineación con las mejores prácticas sistémicas, posiblemente por modelos operativos rígidos o subutilización de capacidades.

Las ESE de niveles 1 y 2 enfrentan brechas tecnológicas superiores al 40% respecto a las de nivel 3, lo que evidencia limitaciones en la disponibilidad y uso de tecnologías adecuadas. Aunque algunas han logrado acercarse a la metafrontera, lo que demuestra el papel decisivo de la adopción tecnológica en la eficiencia sistémica, estos hallazgos subrayan la necesidad de estrategias diferenciadas. Para las ESE de nivel 3, se requieren diagnósticos que identifiquen barreras estructurales; en los niveles 1 y 2, deben priorizarse inversiones en infraestructura, formación del talento humano y redes de transferencia tecnológica. Aprovechar experiencias exitosas puede acelerar la convergencia hacia una mayor eficiencia en el sistema hospitalario público.

## Referencias.

- Aigner, D. J., Lovell, C. A. K., & Schmidt, P. (1977). *Formulation and estimation of stochastic frontier production function models*. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21–37. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(77\)90052-5](https://doi.org/10.1016/0304-4076(77)90052-5)
- ANDI. (2024, noviembre). *Informe del sector salud y healthtech*. <https://www.andi.com.co/Uploads/Reporte%20Sectorial%20Informe%20del%20Sector%20Salud%20y%20Healthtech%20-%20Noviembre%202024.pdf>
- Arbaiza Fermini, L. A., Morales Ospina, Y., & Toledo Bernal, A. I. (2023). *Estado del arte: productividad como concepto en el ámbito de la salud*. Universidad de la Costa. <https://repositorio.cuc.edu.co/entities/publication/fc928195-63a3-4529-bddd-b9141494c143>
- Arbona, A., Giménez, V., López-Estrada, S., & Prior, D. (2022). *Efficiency and quality in Colombian education: An application of the metafrontier Malmquist-Luenberger productivity index*. *Socio-Economic Planning Sciences*, 68, 100667. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2021.101122>
- Arias Galindo, Y. E., & Ramírez Urraya, A. (2021). *Eficiencia hospitalaria en regiones colombianas con percepción de corrupción, mediante técnica DEA*. *Podium*, (39), 1–20. <https://doi.org/10.31095/podium.2021.39.6>
- Armijos, J. C., & Núñez Mondaca, A. (2020). *Indicadores de gestión para evaluar el desempeño de hospitales públicos: Un caso de estudio en Chile y Ecuador*. *Revista Médica de Chile*, 148(5), 626–633. [https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0034-98872020000500626](https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-98872020000500626)
- Battese, G.E. and Coelli, T.J. (1995) *A Model for Technical Inefficiency Effects in a Stochastic Frontier Production Function for Panel Data*. *Empirical Economics*, 20, 325-332. <https://doi.org/10.1007/BF01205442>
- Battese, G. E., & Rao, D. S. P. (2002). *Technology gap, efficiency, and a stochastic metafrontier function*. *International Journal of Business and Economics*, 1(2), 87–93. [https://ijbe.fcu.edu.tw/past\\_issues/NO.1-2/pdf/vol\\_1-2-1.pdf](https://ijbe.fcu.edu.tw/past_issues/NO.1-2/pdf/vol_1-2-1.pdf)

- Battese, G. E., Rao, D. S. P., & O'Donnell, C. J. (2004). *A metafrontier production function for estimation of technical efficiencies and technology gaps for firms operating under different technologies*. *Journal of Productivity Analysis*, 21(1), 91–103.  
<https://link.springer.com/article/10.1023/B:PROD.0000012454.06094.29>
- Cadavid Hincapié, T. C., Gómez Gómez, H. A., & Hernández Cruz, H. W. (2021). *Metodología para la medición de la productividad en instituciones prestadoras de servicios de salud*. *Revista Cuidarte*, 14(1), e3688.  
<https://www.redalyc.org/journal/5604/560468688008/>
- Cao, L., Qi, Z., & Ren, J. (2017). *China's industrial total-factor energy productivity growth at sub-industry level: A two-step stochastic metafrontier Malmquist index approach*. *Sustainability*, 9(8), 1384. <https://doi.org/10.3390/su9081384>
- Carreño Dueñas, A. (2009). *Medición de la calidad, la eficiencia y la productividad en hospitales públicos de tercer nivel de atención en Bogotá, 2008*. *Universidad & Empresa*, 11(17), 203–222. Universidad del Rosario.  
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=187214467007>
- Chen, K.-H., & Yang, H.-Y. (2011). *A cross-country comparison of productivity growth using the generalised metafrontier Malmquist productivity index: With application to banking industries in Taiwan and China*. *Journal of Productivity Analysis*, 35(3), 197–212. <https://doi.org/10.1007/s11123-010-0198-7>
- Crispín-Fory, C., Melo-Becerra, L. A., Restrepo-Tobón, D. A., & Vásquez-Escobar, D. (2023). *Eficiencia y solidez financiera de las instituciones prestadoras de servicios de salud (IPS) en Colombia* (Borradores de Economía No. 1248). Banco de la República de Colombia.  
<https://repositorio.banrep.gov.co/server/api/core/bitstreams/106fe74b-a076-4928-b923-c4a6b73df381/content>
- Du, K., & Lin, B. (2017). *International comparison of total-factor energy productivity growth: A parametric Malmquist index approach*. *Energy*, 118, 481–488.  
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2016.10.052>
- Färe, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., & Roos, P. (1994). *Productivity developments in Swedish hospitals: A Malmquist output index approach*. In A. Charnes, W. W. Cooper, A. Y. Lewin, & L. M. Seiford (Eds.), *Data envelopment analysis: Theory,*

- methodology, and applications (pp. 253–272). Springer.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-011-0637-5\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-011-0637-5_13)
- Fuentes, H. J., Grifell-Tatjé, E., & Perelman, S. (2001). *A parametric distance function approach for Malmquist productivity index estimation*. *Journal of Productivity Analysis*, 15(2), 79–94.  
<https://doi.org/10.1023/A:1007852020847>
- Granger, C., Melo-Becerra, L. A., Ramos-Forero, J. E., & Silva-Samudio, G. T. (2023). *Financiamiento del sistema de salud en Colombia: Fuentes y usos*. En Banco de la República (Ed.), *Aspectos financieros y fiscales del sistema de salud en Colombia* (Ensayos sobre Política Económica, No. 106, pp. 1–52). Banco de la República.  
<https://repositorio.banrep.gov.co/server/api/core/bitstreams/1b2e76dc-e3e7-4ef7-bc31-516ad2027d2b/content>
- Guzmán Finol, K. (2015). *¿Qué hay detrás de un cambio en la productividad hospitalaria?* (Documentos de trabajo sobre Economía Regional y Urbana No. 215). Banco de la República de Colombia. <https://repositorio.banrep.gov.co/items/fc00bc89-0970-4a1d-87f3-0a11844c8813>.
- Hincapié Mesa, F. A., & Montoya Morales, A. J. (2024). *Evaluación de la eficiencia productiva en las instituciones prestadoras de servicios de salud de Caldas*. *Revista Facultad de Ciencias Económicas: Investigación y Reflexión*, 32(1), 103-122.  
<https://doi.org/10.18359/rfce.6747>
- Huang, C. J., Huang, T. H., & Liu, N. H. (2014). *A new approach to estimating the metafrontier production function based on a stochastic frontier framework*. *Journal of Productivity Analysis*, 42(3), 241–254.  
<https://doi.org/10.1007/s11123-014-0402-2>
- Kumbhakar, S. C., & Lovell, C. A. K. (2000). *Stochastic frontier analysis*. Cambridge University Press.  
<https://assets.cambridge.org/97805214/81847/sample/9780521481847wsn01.pdf>
- Kumbhakar, S. C., Wang, H.-J., & Horncastle, A. P. (2015). *A practitioner's guide to stochastic frontier analysis using Stata*. Cambridge University Press. [https://assets.cambridge.org/97811070/29514/frontmatter/9781107029514\\_frontmatter.pdf](https://assets.cambridge.org/97811070/29514/frontmatter/9781107029514_frontmatter.pdf)

- Navarro España, J., Maza Ávila, F., & Viana Barceló, R. (2011). *La eficiencia de los hospitales colombianos en el contexto latinoamericano: Una aplicación de Análisis Envolvente de Datos (DEA)*. *Ecos de Economía: A Latin American Journal of Applied Economics*, 15(33), 71–93.  
<https://ideas.repec.org/a/col/000442/009642.html>
- Maldonado, N., & Tamayo, A. (2007). *Estudio integral de eficiencia de los hospitales públicos* (Archivos de Economía No. 4305). Departamento Nacional de Planeación. <https://ideas.repec.org/p/col/000118/004305.html>
- Malmquist, S. (1953). *Index numbers and indifference surfaces*. *Trabajos de Estadística*, 4, 209–242. <https://doi.org/10.1007/BF03006863>
- Medina, O. F., & De Marco, M. L. C. (2017). *Indicadores de productividad en hospitales públicos*. *Revista Científica Visión de Futuro*, 21(2), 40–60. Universidad Nacional de Misiones.  
<https://visiondefuturo.fce.unam.edu.ar/index.php/visiondefuturo/article/view/98/66>
- Melo-Becerra, L. A., & Orozco-Gallo, A. J. (2017). *Technical efficiency for Colombian small crop and livestock farmers: A stochastic metafrontier approach for different production systems*. *Journal of Productivity Analysis*, 47(1), 1–16.  
<https://doi.org/10.1007/s11123-016-0487-x>
- Mincer, J. (1974). *Schooling, experience, and earnings*. National Bureau of Economic Research.  
<https://www.nber.org/books-and-chapters/schooling-experience-and-earnings>
- Medarević, A., & Vuković, D. (2021). Efficiency and productivity of public hospitals in Serbia using DEA-Malmquist model and Tobit regression model, 2015–2019. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 18(23), 12475.  
<https://doi.org/10.3390/ijerph182312475>
- Meeusen, W., & van den Broeck, J. (1977). *Efficiency estimation from Cobb–Douglas production functions with composed error*. *International Economic Review*, 18(2), 435–444.  
<https://doi.org/10.2307/2525757>

- Ministerio de Salud y Protección Social. (2015, abril 22). *Sobre hospitales públicos en el Plan Nacional de Desarrollo*. <https://www.minsalud.gov.co/Paginas/Sobre-hospitales-publicos-en-el-Plan-Nacional-de-Desarrollo.aspx>
- Ministerio de Salud y Protección Social. (2022). *Propuesta de redefinición de las características de operación de los hospitales públicos: Estudio de modelación de la prestación de servicios de salud primarios ofertada por hospitales públicos en Colombia*. Dirección de Prestación de Servicios de Salud y Atención Primaria. Bogotá D.C.  
<https://www.minsalud.gov.co/sites/rid/Lists/BibliotecaDigital/RIDE/VS/PSA/estudio-oferta-servicios-primarios-hospitales-publicos.pdf>
- Ministerio de Salud y Protección Social & Superintendencia Nacional de Salud. (2024). *Ranquin de Instituciones Prestadoras de Servicios de Salud (IPS), 2024*. <https://docs.supersalud.gov.co/PortalWeb/metodologias/Informes%20de%20Estudios%20Sectoriales/informe-preliminar-ranqig-IPS-2024.pdf>
- Molinos-Senante, M., Maziotis, A., Sala-Garrido, R., & Mocholi Arce, M. (2023). A *stochastic meta-frontier approach for analyzing productivity in the English and Welsh water and sewerage companies*. *Decision Analytics Journal*, 6, 100185. <https://doi.org/10.1016/j.dajour.2023.100185>
- Murillo, K. P., Rocha, E. A. M., & García González, C. A. (2019). *Estudio de eficiencia en la prestación de servicios de salud: El caso de los hospitales públicos de primer nivel en el Valle del Cauca*. Editorial Universidad Santiago de Cali.  
<https://repositorio.usc.edu.co/items/10523965-6f8b-44fc-9a29-db7c5fc51a13Notas>
- Montoya Castaño, A. (2013). *Análisis de eficiencia del sector hospitalario: el caso colombiano* (Tesis de Maestría en Economía). Universidad del Rosario.  
<https://repository.urosario.edu.co/server/api/core/bitstreams/0028113d-5cdb-4523-ba69-15f7bbb54650/content>
- Navarro España, J. L., & Maza Ávila, F. (2011). *La eficiencia de los hospitales colombianos en el contexto latinoamericano: Una aplicación de Análisis Envolvente de Datos (DEA) en un grupo de hospitales de alta complejidad, 2009*. *Ecos de Economía*, 15(33), Medellín, jul./dic.

[http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1657-42062011000200004](http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1657-42062011000200004)

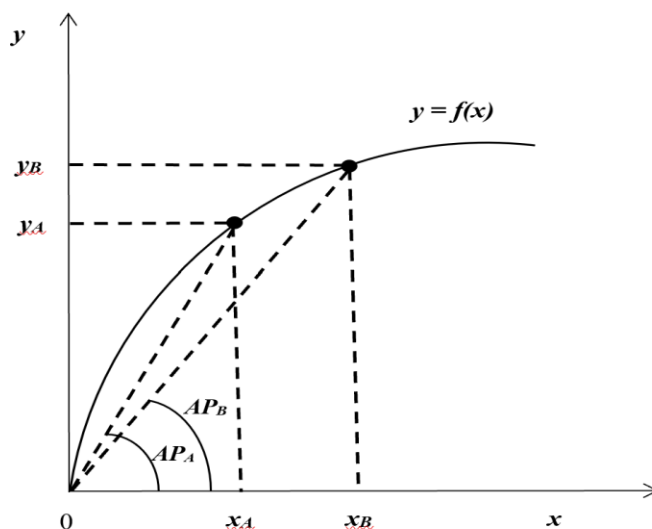
- O'Donnell, C. J., Rao, D. S. P., & Battese, G. E. (2008). *Metafrontier frameworks for the study of firm-level efficiencies and technology ratios*. *Empirical Economics*, 34(2), 231–255. <https://doi.org/10.1007/s00181-007-0119-4>
- Orozco Gallo, A. J. (2014). *Una aproximación regional a la eficiencia y productividad de los hospitales públicos colombianos* (Documento de trabajo sobre economía regional No. 201). Banco de la República, Centro de Estudios Económicos Regionales (CEER).  
[https://d1b4gd4m8561gs.cloudfront.net/sites/default/files/publicaciones/archivos/dts\\_er\\_201.pdf](https://d1b4gd4m8561gs.cloudfront.net/sites/default/files/publicaciones/archivos/dts_er_201.pdf)
- Orozco Gallo, A. J., & Almanza Ramírez, C. (2020). *Evaluating Colombian public hospitals productivity during 2004–2015: A Luenberger-indicator approach*. *Revista Gerencia y Políticas de Salud*, 19, e54562510029. Pontificia Universidad Javeriana.  
[https://revistas.javeriana.edu.co/files-articulos/RGPS/19%20\(2020\)/54562510029/](https://revistas.javeriana.edu.co/files-articulos/RGPS/19%20(2020)/54562510029/)
- Pinzón Martínez, M. J. (2003). *Medición de eficiencia técnica relativa en hospitales públicos de baja complejidad mediante la metodología Data Envelopment Analysis (DEA)* (Documento de trabajo No. 245). Departamento Nacional de Planeación, Dirección de Estudios Económicos.  
<https://colaboracion.dnp.gov.co/cdt/estudios%20economicos/245.pdf>
- Shapley, L. S. (1951, August 21). *Notes on the n-person game—II: The value of an n-person game* (Research Memorandum RM-670). RAND Corporation.  
[https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/research\\_memoranda/2008/RM670.pdf](https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/research_memoranda/2008/RM670.pdf)
- Toro Galván, E. E., (2006). *Medición de la eficiencia de las instituciones prestadoras de servicios de salud públicas mediante técnicas multivariadas y análisis envolvente de datos* (Universidad de los Andes). Repositorio Institucional Séneca. <https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/9379>

## Apéndice A.

### Diferencia entre eficiencia y productividad.

Tomando como referencia la ilustración presentada por Kumbhakar (2015) en la Figura 3 si la empresa  $A(B)$  produce una cantidad de producto  $y_A(y_B)$  usando un nivel de insumo  $x_A(x_B)$ , entonces las dos firmas son técnicamente eficientes. Sin embargo, sus productividades no son las mismas. Para una tecnología de un solo insumo y producto, la productividad se mide mediante la relación de  $y$  a  $x$  (es decir, el producto promedio,  $AP$  de  $x$ ) utilizando los datos observados. Sin necesidad de tener estimaciones econométricas para medir la productividad, de la Figura 3 es claro que la empresa  $A$  es más productiva que la empresa  $B$ .

Por lo tanto, la empresa  $A$  es más productiva que la firma  $B$  porque  $AP_A > AP_B$ , aunque no sea más eficiente que la empresa  $B$ . Además, si la función de producción es cóncava (con rendimientos decrecientes a escala), la productividad disminuye a medida que se utiliza más y más insumo, a menos que haya un cambio en la tecnología.



**Figura 3. Productividad y eficiencia**

De lo anterior, surge la pregunta es si el uso de más insumos, o el aumento del tamaño de la empresa, que se asocia con una productividad decreciente, es "malo" en algún sentido, es decir, si una empresa  $B$  más grande no es tan "buena" como la empresa  $A$ . La

respuesta se da la rentabilidad. Además, si una firma es técnicamente ineficiente su productividad puede mejorarse eliminando la ineficiencia, independientemente de cómo se mida ésta, es decir, si es orientada a los insumos o a productos. Eliminar la ineficiencia incrementa la rentabilidad si no cuesta nada eliminarla y si los precios se mantienen constantes Kumbhakar (2015).

Las funciones de distancia orientadas a insumos, utilizadas en este trabajo, miden la cantidad máxima en la que se puede reducir la combinación de insumos manteniendo el mismo nivel de producción y sin afectar negativamente su calidad. En concordancia con la estrategia utilizada en la literatura sobre estimaciones de eficiencia con frontera estocástica para servicios de salud, es más apropiado usar funciones de distancia orientada a insumos porque estas firmas no tienen control absoluto sobre la cantidad de servicios prestados debido a que dependen exógenamente de la cantidad de pacientes por atender y otras variables externas.

Estas funciones de distancia, orientadas a insumos, permiten modelar la estructura operativa de los hospitales públicos, como unidades de producción de una variedad de servicios de salud, sin enfocarse en la maximización de beneficios o reducción de costos, sino en mejorar la salud de los pacientes. Además, sin control total sobre el volumen de servicios prestados, los cuales están determinados por factores exógenos no están relacionados con la eficiencia (Montoya, 2013).

## Apéndice B.

Método de contribuciones de Shapley (1951).

El método de contribuciones de Shapley es una técnica basada en la teoría de juegos cooperativos que permite descomponer la contribución de cada variable explicativa en un modelo. Se usa comúnmente para evaluar la importancia de los factores en una regresión, asignando a cada variable su impacto marginal promedio en todas las posibles combinaciones. El valor de Shapley mide la contribución marginal promedio de cada variable en todas las posibles combinaciones. Para cada variable, se calcula su impacto en Y considerando todos los subconjuntos posibles de variables presentes y ausentes.

Cálculo.

1. Generar todas las permutaciones posibles de las variables {A, B, C, D}.
2. Calcular la contribución marginal de cada variable en cada orden de inclusión.
3. Promediar las contribuciones sobre todas las permutaciones.

Donde:

- S es un subconjunto de variables sin  $X_i$ .
- $f(S)$  es el valor de Y cuando solo están las variables en S.
- n es el número total de variables.
- el valor de Shapley con un ejemplo sencillo usando los cinco actores que proporcionaste, donde su producto da un resultado específico.
- El valor de Shapley es un concepto de la teoría de juegos que asigna una contribución justa a cada jugador en una coalición. Imagina que estos "actores" son elementos que contribuyen al resultado final (1.005351989). Se quiere saber cuánto "mérito" o "importancia" tiene cada uno individualmente en alcanzar ese número.
- Para simplificarlo, se especifica el impacto que tiene cada actor (determinante de la PTF) en el resultado final cuando está presente o ausente, en todas las combinaciones posibles de jugadores.

La fórmula matemática para calcular el valor de Shapley para un jugador i es la siguiente:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|! (n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Donde:

- $\phi_i(v)$  es el valor de Shapley para el jugador (actor)  $i$
- $N$  es el conjunto de todos los jugadores (actores) en el juego. En el ejemplo,  $N = \{ECUI_{N1}, TCUI_{N1}, GEI_{N1}, GTCI_N\}$ .
- $n$  es el número total de jugadores en  $N$ . En el ejemplo  $n = 4$
- $S$  es un subconjunto de jugadores que no incluye al jugador  $i$ .
- $|S|$  es el número de jugadores en el subconjunto  $S$ .
- $|S|!$  es el factorial del número de jugadores en  $S$ .
- $(n - |S| - 1)!$  es el factorial de la diferencia entre el número total de jugadores, el número de jugadores en  $S$ , y 1 (el jugador  $i$ ).
- $n!$  es el factorial del número total de jugadores.
- $v(S)$  es el “valor” (o el resultado de la coalición) cuando solo los jugadores en el subconjunto  $S$  están presentes.
- $v(S \cup \{i\})$  es el “valor cuando los jugadores en el subconjunto  $S$  y el jugador  $i$  están presentes.
- $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$  es la contribución marginal del jugador  $i$  a la coalición  $S$ . Es decir, cuánto “añade” el jugador  $i$  al valor cuando se une a la coalición  $S$ .

Aplicación al caso multiplicativo de este trabajo, es decir las definiciones dadas por las ecuaciones (12) a la (15):

Los “valores”  $v(S)$  se calculan mediante la multiplicación de los actores.

- El valor base para una coalición vacía (sin actores) sería 1 (ya que cualquier número multiplicado por 1 no cambia). Es decir,  $v(\emptyset) = 1$ .
- Si una coalición  $S$  incluye a, por ejemplo,  $ECUI_{N1}$  y  $TCUI_{N1}$ , entonces  $v(S) = ECUI_{N1} \times TCUI_{N1}$ .

Para cada actor (por ejemplo,  $ECUI_{NI}$ ) se tendría que considerar todas las posibles coaliciones de los otros 3 actores ( $TCUI_{NI}$ ,  $GECI_{NI}$ ,  $GTCI_N$ ) y calcular su contribución marginal al unirse a esas coaliciones.

El termino  $\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}$  es un peso que se da a la contribución marginal, asegurando que cada posible orden en el que los jugadores podrían unirse a una coalición se considere de manera equitativa.

## Apéndice C.

### 1. Prueba de razón de verosimilitud para identidad de tecnologías de los tres niveles de complejidad.

**Tabla 1.**

<i>H</i> <sub>0</sub> : Tecnologías de los tres niveles idénticas (trascendental logarítmica)		
<i>H</i> <sub>1</sub> : Tecnologías heterogéneas en los tres niveles		
Log likelihood_N1	=	3380.917
Log likelihood_N2	=	775.501
Log likelihood_N3	=	260.501
<i>L</i> <sub>0</sub>	=	4405.489
<i>L</i> <sub>1</sub>	=	4416.919
<i>k</i> <sub>0</sub> y <i>k</i> <sub>1</sub>	=	120 y 40
$LR = -2 \times [LR(H_1) - LR(H_0)]$	=	8793.192
$\sim \chi^2(k_1 - k_0, 0,05) g.l.$	=	60.391
Rechazo de <i>H</i> <sub>0</sub> : Tecnologías idénticas de los tres niveles de complejidad		

Se rechaza *H*<sub>0</sub>: Las tecnologías subyacentes en las funciones de distancia de los diferentes niveles son idénticas (parámetros iguales). Esto justifica el uso del enfoque de la técnica metafrontera para estimar y comparar las eficiencias y productividades de cada nivel respecto a las mejores prácticas de todo el sector de hospitales públicos.

### 2. Prueba de razón de verosimilitud para especificación Trascendental logarítmica Vs *Cobb Douglas*:

**Tabla 2.**

**Prueba: *H*<sub>0</sub>: Tecnología Cobb-Douglas es adecuada *H*<sub>1</sub>: Translog es más adecuada**

Niv 1 - $LR\_N1 = -2 \times [LR(H_1) - LR(H_0)]$	=	799.822
Niv 2 - $LR\_N2 = -2 \times [LR(H_1) - LR(H_0)]$	=	335.045
Niv 3 - $LR\_N3 = -2 \times [LR(H_1) - LR(H_0)]$	=	324.235
Nivel 1 - Val_Cr. $\chi^2(21,0.05)$	=	11.591
Nivel 2 - Val_Cr. $\chi^2(21,0.05)$	=	11.591
Nivel 3 - Val_Cr. $\chi^2(22,0.05)$	=	12.338
ESE Nivel 1 - P-valor	=	9.90E-156
ESE Nivel 2 - P-valor	=	2.22E-58
ESE Nivel 3 - P-valor	=	1.44E-55
Rechazo de <i>H</i> <sub>0</sub> : Tecnologías idénticas de los tres niveles de complejidad		

### **3. Estimaciones de las funciones de distancia bajo distribución Normal Truncada del término de ineficiencia los términos de error.**

La estimación usa bajo el modelo de Battese y Coelli (1995), que es una especificación de frontera estocástica para datos de panel. Dado que el mínimo valor mínimo de la ineficiencia es 0 y las estimaciones de los coeficientes de las funciones de distancia y de metafrontera se realizan asumiendo la distribución truncada, lo cual significa que la ineficiencia técnica se modela como una variable aleatoria no negativa con una distribución normal truncada en cero.

Lejos de estar arbitrariamente impuesta esta distribución, Battese y Coelli (1995) desarrollaron y justificaron estadísticamente su uso como una mejora respecto a modelos anteriores que asumían distribuciones más restrictivas, como la media cero o la media constante. En su propuesta, la media del término de ineficiencia puede depender de variables explicativas, lo que permite capturar heterogeneidad en la ineficiencia entre unidades y a lo largo del tiempo.

### **4. Metodología para construir el índice de calidad hospitalaria y ajustar los índices de cambio en *MMPI* y *MECI* (de metafrontera).**

#### **4.1 Selección de variables de calidad**

Las variables utilizadas para construir el índice de calidad son:

- Días de espera de citas para medicina general.
- Días de espera de citas para odontología.
- Porcentaje de pacientes satisfechos con los servicios recibidos.

#### **4.2 Normalización de las variables**

Para hacer comparables las variables entre hospitales y años, se aplica una normalización min-max, diferenciando según el sentido de la calidad:

• Para variables donde menor valor indica mejor calidad (como los días de espera), se usa normalización inversa:

$$Q_{it}^{(j)} = 1 - \frac{x_{it}^{(j)} - \min(x^{(j)})}{\max(x^{(j)}) - \min(x^{(j)})}$$

• Para variables donde mayor valor indica mejor calidad (como el porcentaje de satisfacción), se usa normalización directa:

$$Q_{it}^{(j)} = \frac{x_{it}^{(j)} - \min(x^{(j)})}{\max(x^{(j)}) - \min(x^{(j)})}$$

#### 4.3 Índice compuesto de calidad

Las variables normalizadas se agregan en un índice compuesto utilizando pesos  $w_j$  para cada variable:

$$\text{Índice}_{calidad,t} = \sum_j w_j \times Q_{it}^{(j)}$$

#### 4.4 Cálculo del cambio en calidad

El cambio en calidad entre dos periodos se calcula como el cociente entre el índice de calidad actual y el del periodo anterior:

$$\Delta\text{Calidad}_{it} = \frac{\text{Índice}_{calidad,it}}{\text{Índice}_{calidad,t}^{-1}}$$

#### 4.5 Ajuste del índice de productividad

Finalmente, se ajusta el índice de cambio en la productividad multifactorial de Malmquist multiplicándolo por el cambio en calidad:

$$PTF_{ajustado,t} = PTF_{it}^{Malmquist} \times \Delta\text{Calidad}_{it}$$

#### 4.6 Interpretación del índice ajustado

El índice ajustado refleja el cambio conjunto en productividad y calidad. Puede ser:

- Mayor que 1: mejora conjunta.
- Menor que 1: deterioro conjunto o compensación.
- Igual a 1: sin cambio neto.

**5. Resto de parámetros de las funciones de distancia con especificación trascendental logarítmica.**

**Tabla 3.**

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Metafrontera		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Metafrontera
Var Dep:	$LN(\text{Camas\_Unidades\_odont\_y\_Quirofanos})$			Eficiencias predichas	Var dep:	$LN(\text{Camas\_Unidades\_odont\_y\_Quirofanos})$			Eficiencias predichas
ly1ly1	-0.0818*** (-17.23)	-0.0579*** (-4.36)	-0.180*** (-7.03)	-0.0749*** (-69.00)	ltx2ltx2	-0.01 (-0.69)	0.0391* (2.24)	0.101*** (4.27)	0.0281*** (11.35)
ly1ly2	-0.0579*** (-11.54)	-0.0517** (-3.17)	-0.0925** (-3.16)	-0.0617*** (-42.20)	ltx2ltx3	0.0567*** (7.19)	0.0216 (1.53)	0.111*** (4.5)	0.0275*** (16.19)
ly1ly3	-0.0205*** (-3.35)	0.0129 (-0.91)	-0.0697* (-2.31)	-0.00995*** (-6.46)	ltx2ltx4	-0.0323** (-2.81)	-0.0413* (-2.28)	-0.164*** (-4.62)	-0.0475*** (-20.51)
ly2ly2	-0.0261** (-2.81)	0.0215 (0.69)	-0.114 (-1.36)	-0.00906** (-2.72)	ltx3ltx3	-0.0671*** (-10.10)	0.001 (-0.06)	0.368*** (7.75)	-0.0197*** (-10.86)
ly2ly3	-0.0312*** (-3.55)	-0.0449 (-1.67)	0.0798 (0.99)	-0.0463*** (-14.27)	ltx3ltx4	-0.0107 (-1.52)	-0.0376* (-2.10)	-0.393*** (-10.99)	-0.00761*** (-4.42)
ly3ly3	-0.00184 (-0.16)	0.0424 (1.38)	-0.108 (-1.66)	0.0197*** (5.09)	ltx4ltx4	0.0192 (1.65)	0.0886*** (3.69)	0.385*** (7.2)	0.0519*** (18.54)
ly1ltx2	-0.0118 (-1.95)	-0.0148 (-0.97)	0.0837** (2.96)	-0.0146*** (-9.27)	t	0.0106*** (6.11)	0.00766 (1.83)	0.0455*** (3.32)	0.00961*** (19.37)
ly1ltx3	-0.0288*** (-7.45)	-0.0835*** (-7.88)	-0.140*** (-3.73)	-0.0439*** (-42.14)	t2	-0.00145*** (-7.22)	-0.000894 (-1.78)	-0.00135 (-1.37)	-0.00131*** (-19.53)
ly1ltx4	0.0310*** (5.52)	0.0348* (2.14)	-0.0744 (-1.58)	0.0453*** (-31.76)	ly1t	0.000803 (1.33)	-0.00284 (-1.72)	0.00459 (1.24)	-0.0000669 (-0.45)
ly2ltx2	0.0233* (2.18)	-0.0313 (-1.30)	-0.0644 (-1.56)	-0.00393 (-1.46)	ly2t	-0.00373*** (-3.70)	-0.00278 (-1.03)	-0.00409 (-0.71)	-0.00228*** (-9.08)
ly2ltx3	-0.0147* (-2.05)	0.0147 (0.83)	-0.167** (-3.28)	0.00944*** (4.35)	ly3t	0.00379*** (3.54)	-0.00687** (-2.83)	0.00417 (0.92)	0.000853*** (3.32)
ly2ltx4	-0.0146 (-1.51)	-0.026 (-1.00)	0.116 (1.83)	-0.0231*** (-9.69)	ltx2t	-0.00384*** (-3.77)	-0.000437 (-0.24)	0.00811** (2.8)	-0.00291*** (-12.17)
ly3ltx2	-0.0136 (-1.18)	0.0355 (1.84)	0.117*** (3.44)	0.00556* (2.32)	ltx3t	0.00196** (2.84)	-0.000817 (-0.47)	0.0144*** (3.43)	0.00108*** (5.75)
ly3ltx3	-0.0293*** (-3.74)	-0.0802*** (-5.24)	-0.0699* (-2.02)	-0.0496*** (-24.15)	ltx4t	0.00162 (1.76)	0.00269 (1.32)	-0.0190*** (-3.68)	0.00164*** (7.51)
ly3ltx4	0.0349*** (3.37)	0.034 (1.4)	-0.0275 (-0.59)	0.0515*** (21.52)	Dum_covid				-0.00208 (-1.00)
					Constante	0.258*** (28.69)	0.250*** (5.7)	0.188 (0.75)	0.282*** (157.23)
x1 = Camas_Unidades_odont_y_Quirofanos				y1 = Proced. quirúrgicos_e_intervencione					
x2 = Talento humano en salud (THS)				y2= Proced. Apoyo, diag. y tratamientos					
x3 = Consultorios_Mesas de parto_y_cirugía				y3 = Consultas_y_prevene					
x4 = Empleados_no_THS									