

MICROECONOMICS APPROACHES IN THE CHRISTALLER'S CENTRAL PLACES THEORY

LUIS GUILLERMO BECERRA VALBUENA*

In this document, a review of the most important approaches of the Central Places Theory (CPT) postulated by Walter Christaller is carried out. Similarly, an exploration of the different attempts to model this theory in spatial economics is conducted. Furthermore, the paper presents a model based on game theory which is able to pick up certain aspects of the Christaller's CPT such as the hexagonal configuration of the space in which firms compete, as well as the fact that the firms or central places divide the market in equal parts. Also, the behavior of consumers trying to minimize transportation costs and obtain lower prices is studied; this leads them to the closest central places that offer a lower composite price (price + transportation costs). The model shows the existence of a symmetric Nash equilibrium where, despite the fact that a central place is surrounded by 6 firms or central places, the central places compete each other for a specific market area on an isotropic space. Such oligopolistic competition is linked to the hexagonal configuration postulated by Christaller. In other words, the Christaller's hexagonal configuration is coherent with a symmetric Nash equilibrium.

JEL classification: C2, D4, L1, R1, R3.

Keywords: Christaller's Central Places Theory, Symmetric Nash equilibrium, Spatial Distribution, Oligopoly, Urban System.

* The author thanks Juan Esteban Carranza and Francisco Javier Lozano for their comments. The author also thanks the participants to the seminar "La economía de las ciudades" organized by the journal Ensayos sobre Política Económica (ESPE), Banco de la República.

When this article was written, the author was consultant of the Inter-American Development Bank in Washington DC.

E-mail:
guillotell@gmail.com,
lgbecerrav@unal.edu.co

Document received:
22 June 2012;
final version accepted:
30 January 2013.

APROXIMACIONES MICROECONÓMICAS EN LA TEORÍA DE LOS LUGARES CENTRALES DE CHRISTALLER

LUIS GUILLERMO BECERRA VALBUENA*

En el presente documento se hace una revisión de los planteamientos más importantes de la Teoría de los Lugares Centrales (TLC) formulada por Walter Christaller, así como una exploración de los diferentes intentos de modificación que se han hecho de esta teoría en la economía espacial. Posteriormente, se muestra un modelo de teoría de juegos con el cual se logran recoger ciertos aspectos de la TLC como la configuración hexagonal del espacio por el cual compiten las firmas, además del hecho de que las firmas o lugares centrales se terminan repartiendo el mercado en formas iguales. Igualmente, se estudia el comportamiento de los consumidores que buscan minimizar sus costos de transporte y obtener un menor precio, lo que lleva a que se dirijan a los lugares centrales más cercanos, que les ofrecen un menor precio compuesto (precio+costo de transporte). El modelo muestra la existencia de un equilibrio de Nash simétrico en donde, a pesar de que un lugar central está rodeado de 6 firmas o lugares centrales, compite contra ellas uno a uno por un área específica de mercado en un espacio isotrópico. Tal competencia oligopólica está ligada a la configuración hexagonal que postulaba Christaller. En otras palabras, la configuración hexagonal de Christaller es coherente con un equilibrio de Nash simétrico.

Clasificación JEL: C2, D4, L1, R1, R3.

Palabras claves: Teoría de los Lugares Centrales de Christaller, equilibrio de Nash simétrico, distribución espacial, oligopolio, sistema urbano.

* El autor agradece los comentarios de Juan Esteban Carranza, gerente del Banco de la República, sucursal Cali; del profesor Francisco Javier Lozano, así como a los asistentes al IX Seminario "La economía de las ciudades" organizado por la revista Ensayos sobre Política Económica (ESPE), Banco de la República.

Cuando este artículo se realizó, el autor era consultor del Banco Interamericano de Desarrollo con sede en Washington DC.

Correos electrónicos:
guillotell@gmail.com,
lgbecerrav@unal.edu.co

Documento recibido:
junio 22 de 2012;
versión final aceptada:
enero 30 de 2013.

I. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia del hombre, han existido relaciones de comercio e intercambio entre los individuos, las cuales han girado en torno a la producción de bienes y servicios para su beneficio propio y el de los demás. Tales individuos han ido reuniéndose y agrupándose en ciertos condados, pequeñas villas y pueblos, lo que ha hecho que en estos sitios sea posible para el hombre obtener una mayor variedad y cantidad de bienes y servicios en un solo lugar y al mismo tiempo, sin tener que dirigirse a diferentes partes para poder conseguir las mercancías que necesiten. En este proceso, se han hecho evidentes las relaciones de comercio e intercambio mutuo, no solo entre individuos, sino además, entre grupos de sujetos de alguna villa con los de otras. Es decir, nuestro comportamiento ha hecho que existan redes mercantiles entre muchos individuos y, más específicamente, entre condados y villas. Estos condados y villas han crecido en, gran parte, gracias a este tipo de relaciones en las cuales la división del trabajo ha tomado el papel fundamental, con lo cual se ha logrado concentrar una mayor oferta de bienes y servicios que son cada vez más diversos y cuyos excedentes son exportados a otros condados. Como consecuencia, se han convertido en ciudades. El mismo Smith (1997) nombraba la seguridad y libertad en las ciudades como factores que permitieron el florecimiento de la industria y el capital dentro de estas antes que en los distritos rurales, ya que allí era posible mejorar en forma más estable las condiciones de vida. Así, hoy se aprecia la existencia de una mayor concentración de población en las ciudades que en la zona rural. También se hace evidente la necesaria interrelación y el beneficio mutuo que existe entre estas y el campo, así como el mayor crecimiento de la industria y los servicios, lo que justifica la importancia de las ciudades dentro del contexto mundial y nacional. Por esta

razón, las compañías de hoy más que ubicarse y competir en un país, buscan localizarse en ciudades que les puedan brindar una mayor cantidad de demanda a satisfacer, lo cual es producto de una mayor liberalización del comercio, que ha reducido el poder de los gobiernos nacionales e incrementado el de las ciudades¹.

La geografía económica muestra que tal tipo de concentración de las actividades económicas se ha dado de manera más fuerte en las ciudades (Fujita, Krugman y Mori, 1999). Tal concentración no solo ha sido en términos económicos, sino también en términos poblacionales, como lo afirma el informe de las Naciones Unidas (2007) “*World Population Prospects: World Urbanization Prospects and the 2007 Revision*” (*Prospectos de la Población Mundial: Prospectos de Urbanización Mundial y Revisión 2007*). De acuerdo a este informe, en las regiones desarrolladas el 75% de la población residía en las áreas urbanas para el año 2005, mientras que en los menos desarrollados este porcentaje era de 42,7%. Por otro lado, se aprecia una tendencia creciente en estas cifras, especialmente en las regiones menos desarrolladas donde esta alcanzaría el 50% para el año 2020 y sobrepasaría el 60% para el 2040.

En su gran mayoría las teorías de localización cuentan con una serie de características similares que permiten clasificarlas dentro de la economía espacial y que serán tomadas para efectos de la modelación. Entre tales características está el espacio isotrópico, la no existencia de barreras al desplazamiento dentro del espacio y un mismo tipo de transporte por lo que los costos de transporte son proporcionales a la distancia. Igualmente, se asume una densidad poblacional igual dentro del espacio, la posibilidad de moverse de la misma forma hacia todos los lugares, igualdad en el acceso a recursos financieros, demandas similares, racionalidad económica para optimizar sus resultados, competencia en los mercados y la no influencia en el precio de los bienes.

Así mismo, desde la publicación en 1933 del artículo “*Die zentralen Orte in Süddeutschland*” (*Los lugares centrales en el sur de Alemania*), por Walter Christaller, se dio paso a la idea de las configuraciones económicas y espaciales del entorno, específicamente de lugares concéntricos de tipo jerárquico entre las ciudades. Este análisis ha sido llamado la Teoría de los Lugares Centrales (TLC). Tal ha sido su aporte, tanto a la economía espacial como a la geografía, que dio una visión base respecto al comportamiento de las ciudades, frente a cómo estas se establecen y, de igual forma, cómo tienden a aglomerarse para sacar ventaja de su cercanía. Por su importancia, constituye

1 *The Economist*, p. 18, 29 Julio, 1995.

una teoría de la distribución y jerarquización de las ciudades, lo que la convierte en referencia obligada para los teóricos de la economía espacial como mecanismo eficiente para explicar el comportamiento en la vida real de las ciudades. También, ha servido para explicar las aglomeraciones que pueden aparecer en los mercados de bienes particulares.

Para algunos teóricos como Fujita y Thisse (1996), la TLC, junto con los desarrollos efectuados posteriormente por Lösch, constituye la piedra angular de la geografía económica clásica. La propuesta de Christaller era determinar las reglas en el tamaño, número y distribución de las ciudades por medio de una teoría de lugares centrales que incluía tanto nodos como vínculos entre ellos. Sin embargo, a pesar de que se ha comprobado su aplicabilidad en diferentes terrenos y que ha logrado dar respuestas coherentes con lo acontecido en la realidad², se podría decir que en la TLC los apun-
tamientos microeconómicos están por ser desarrollados (Fujita y Thisse, 1996).

Entre los aportes más importantes para darle fundamentación microeconómica a la teoría de los lugares centrales está el realizado por Eaton y Lipsey (1982), para los que no es una teoría del comportamiento económico-espacial, sino una serie de brillantes conjeturas de localización. A pesar de que Eaton y Lipsey (1982) consideran a su modelo algo primitivo, creen que es importante proveer una teoría de los lugares centrales del comportamiento económico, con miras a entender mejor el fenómeno en el mundo real. Esta estrategia de modelación guarda similitud con Christaller porque el equilibrio encontrado satisface el principio jerárquico, pero se aleja bastante de su propuesta porque trata de explicar el comportamiento de los agentes a través de externalidades de demanda creadas por las compras multipropósito de los agentes (la idea de ir a un sitio de mercado y que el agente pueda comprar varios tipos de bienes), lo que la TLC no considera.

De esta forma, el objetivo de este documento es responder a la pregunta de si es posible proveer a la TLC de Christaller con un andamiaje más acorde a las vicisitudes que planteó el autor inicialmente. El aporte que se quiere hacer es exponer una nueva forma de abordar el problema con otro tipo de herramientas, como las que ofrece la Teoría de Juegos, que para la época de la publicación del documento de Eaton y Lipsey (1982) no estaba tan desarrollada, o simplemente no se consideraban tan adecuadas para tratar este tipo de modelaciones.

2 Ver O'Brien y Harris (1991) y Dennis, Marsland y Cockett (2002).

El problema, en principio, parece ser complicado porque como dice Fujita y Thisse (1996) envuelve varios tipos de no convexidades, lo cual es más complicado que tratar con rendimientos a escala crecientes en la producción. Esto puede suceder, por ejemplo, cuando un comprador organiza su itinerario de compra, de forma tal que minimice el costo total de sus compras (incluyendo sus costos de transporte). De aquí habría que determinar el patrón geográfico óptimo de compras, lo cual puede envolver distintas combinaciones, lo cual dificulta la obtención de un equilibrio. De igual forma, pueden existir economías de escala debido al almacenamiento de bienes adquiridos por el comprador. Estas no convexidades, tal parecen, podrían afectar las funciones de demanda pero hasta ahora no se ha investigado este inconveniente.

Se busca, entonces, utilizar algunas herramientas de la Teoría de Juegos y de la microeconomía (en particular de la organización industrial) y dar una aproximación alternativa a la TLC, planteada principalmente por Christaller. De igual forma, también se quiere realizar un aporte metodológico diferente para abordar la TLC que tome algunos de los postulados que planteó en su libro Christaller (1933) *Central Places in Southern Germany*, en particular, la idea de que la competencia oligopólica entre firmas o lugares centrales por un área de mercado es consistente con la configuración hexagonal que propugnaba Christaller, para poder entender el comportamiento de los lugares centrales.

El documento está compuesto de una introducción donde se revisan los alcances y una sección 2, que explora las diferentes vertientes de la economía espacial y de autores que han analizado la TLC de Christaller; posteriormente, la sección 3 hace una descripción de los aspectos más preponderantes que planteó el propio Christaller acerca de la TLC, en la sección 4 se plantea la estrategia de modelación y, por último, se describen las conclusiones más importantes.

II. MARCO DE REFERENCIA³

El análisis espacial ha sido estudiado por los economistas clásicos hasta autores mucho más recientes como Krugman, y se ha caracterizado por la búsqueda de una localización óptima, para explicar la aglomeración y dispersión de las actividades

3 Para una revisión más exhaustiva y detallada de las diferentes vertientes teóricas de la economía espacial ver: Maggioni (2002) y Kilkenny y Thisse (1999).

económicas, el surgimiento y crecimiento de las ciudades. De esta forma, en la sección A se hará una revisión de los exponentes más importantes de la economía espacial, para pasar a una exploración de los diferentes intentos de modelación de la TLC de Christaller en la sección B.

A. VERTIENTES DE LA ECONOMÍA ESPACIAL

Como afirma Muiños (2001), desde Cantillon e incluso Smith ya se consideraba la importancia de la mano de obra y su relación con el espacio, sus consecuencias en temas productivos y la reciprocidad entre el campo y la ciudad. Posteriormente, otros autores como Wilhem Roscher y Albert Schaffle constituirían una evolución de las ideas de localización agrícola hacia unas más urbanas e industriales, influyendo en ideas como las de von Thünen acerca de la localización óptima de cultivos agrícolas (Muiños, 2001).

Para algunos, von Thünen (1783-1850) es reconocido como “el padre de las teorías de localización” quien, a diferencia de las interpretaciones abstractas de los autores clásicos, partió de observaciones empíricas en sus análisis, donde le dio importancia a las ciudades, la influencia de la distancia, los costos de transporte y en sí, a la ubicación de las actividades económicas sobre los precios de mercado. Su tesis más importante es que la distancia y el costo de transporte determinan la localización de las actividades económicas llevando a la formación de zonas económicas alrededor de un centro o ciudad en un espacio homogéneo. Los cultivos más cercanos a la ciudad, implican menores costos de transporte, pero más costos en arrendamiento y en el límite, las tierras más alejadas del centro tendrían un costo de arrendamiento de 0. Esto lleva a la configuración de una ciudad monocéntrica cuya estructura de anillos concéntricos es creada por los costos de arrendamiento y transporte, lo que daría lugar a la existencia de unos precios diferenciales del suelo del centro a la periferia.

Más adelante, Weber plantearía que la distancia para acceder al mercado y a los recursos naturales en un espacio isotrópico es el factor primordial que determina la localización de una industria. Para él, la industria busca localizarse donde se minimicen sus costos de transporte, teniendo en cuenta la cercanía al mercado y los factores de producción, en especial el factor trabajo que es abundante. Por último, Weber agregó el concepto de aglomeración según el cual al ubicarse más cerca a otras, las industrias sacan ventajas en términos de costos de transporte, cercanía de la

mano de obra calificada, vías de acceso y recursos. Tal concepto permite explicar la concentración espacial de las actividades económicas, el surgimiento de las ciudades y las regiones polarizadas. No obstante, algunos critican a Weber por considerar los costos de transporte únicamente en términos de la distancia y por no considerar el tiempo que toma en llegar una mercancía o un factor de producción. A diferencia de von Thünen, Weber contempló la cercanía a los factores de producción como un elemento importante en la decisión de localización de la misma.

Otro precursor fue Hotelling (1929), que introdujo un análisis más teórico por medio del uso de modelos de duopolios de tipo Cournot⁴. El autor modeló la competencia en precios entre firmas que están sujetas a unos costes de transporte y que buscan la ubicación a lo largo de una línea de longitud l que les proporcione una mayor demanda de compradores. Los consumidores son racionales y su objetivo es comprar a la firma que les ofrezca el menor precio total (precio+costos de transporte). Esto conlleva a un equilibrio en el que no hay cooperación, con un precio menor al que se tendría en caso de un acuerdo de precios. En este sentido, el área de mercado sobre la línea que se está tomando como base determina los beneficios, mientras que el tipo de competencia o no que se dé, establece la situación. Lo destacable de Hotelling es que planteó directamente la competencia entre dos firmas a lo largo de una línea recta, a diferencia de von Thünen y de Weber que consideraban elementos como la distancia y la cercanía a los factores de producción pero en términos de una sola firma.

Los autores anteriores pueden ser señalados como los precursores de la TLC, ideas que fueron mejor desarrolladas por Walter Christaller en su tesis doctoral "*Die Zentralen Orte in Süddeutschlan*" (*Los lugares centrales en el sur de Alemania*) (1933) y continuada por Lösch (1940), en lo que ha sido denominado la Teoría de los Lugares Centrales (TLC). Gran parte de esta estructura fue dada por Christaller y refinada por Lösch al encontrar que la misma cercanía entre lugares centrales hace que la distribución espacial de las mismas tome una forma hexagonal, lo cual es lo más eficiente. En últimas, la localización depende de los costos de producción y de transporte inherentes con el lugar central. Tal vez, la característica más importante entre estos dos autores es la idea de que los lugares centrales más grandes surten de servicios y bienes a los lugares más pequeños, creándose así una jerarquía

4 El modelo de Cournot describe la estructura de competencia de dos firmas por la cantidad de producción en una industria.

de ciudades. En tales sistemas de ciudades el aumento poblacional tiene un papel primordial para explicar la creación de estas redes y para explicar el cambio postindustrial donde el sector de servicios empieza a tener una importancia mayor. Según Hernández (2006), la TLC de Christaller surge como una teoría de localización de las actividades terciarias, a diferencia de la industrial de Weber.

Lösch, a diferencia de Von Thünen y Christaller, no considera las ventajas de las economías de aglomeración. Asimismo, Lösch reconocía que las firmas se desplazan a un lugar cuando la abundancia de la mano de obra hace que se cubran los costos de localizarse en un sitio más cercano a ese factor, en especial en empresas intensivas en manos de obra, lo cual es compartido por Weber. Se destaca, también, la concepción de Christaller (1933) de la TLC y del sistema de lugares centrales en un contexto dinámico que, aunque realiza un análisis en principio estático, considera más adelante que los factores que mantienen el equilibrio en el sistema son inestables y sujetos a choques como variaciones en los precios o en los umbrales de las firmas.

Para algunos autores la diferencia entre Lösch y Christaller radica en la concepción respecto a las redes de mercado. En este sentido, Lösch hace una aproximación inductiva, partiendo de una sola mercancía con un área de mercado pequeña y empieza a introducir otras mercancías con áreas de mercado mayor. Por otro lado, Christaller es más deductivo, ya que empieza en el área de mercado más grande hasta llegar a las más pequeñas. Otra posible diferencia entre Christaller y Lösch es que el primero considera a la especialización en una forma estrictamente jerárquica, en la que los pequeños centros no ofrecen a los centros mayores, mientras que Lösch si deja abierta esa posibilidad (Washington University, 2002). No obstante, aunque Lösch se concentra principalmente en los costos de transporte y de producción de los lugares centrales, tanto Christaller como Lösch comparten la idea de jerarquía de centros urbanos.

Una de las críticas que se le hace a la TLC de Christaller es que no considera las mejoras logradas en el desplazamiento de los individuos y su impacto en los costos de transporte y mejoras en comunicaciones entre los agentes, lo que haría innecesarias o no tan importantes los costos de desplazamiento. Asimismo, esta teoría no considera el despoblamiento y envejecimiento de las áreas rurales y el hecho de que las decisiones de desplazamiento de un individuo a un sitio para hacer sus compras no obedece solo a cuestiones de beneficio, si no que hay otros aspectos como la seguridad, la congestión y la existencia de sitios de esparcimiento en las áreas donde se

dirige el comprador, que le permiten al individuo realizar sus compras de una forma mucho más amena.

Otro de los grandes aportes a la discusión es el realizado por Walter Isard (1960) quien fue uno de los precursores en la inclusión del espacio a la teoría de equilibrio general. No menos importante, es su contribución a las relaciones intraurbanas y la concepción de un sistema de ciudades y regiones, en donde la interacción y la distancia entre las comunidades urbanas y sus vecindades en su modelo gravitacional juegan un papel fundamental. Asimismo, Isard provee un análisis empírico bastante riguroso de las regiones y de la actividad económica en los Estados Unidos, donde aplica, en buena parte, los modelos propugnados por él. En los modelos de interacción espacial y gravitacional, la región es concebida como una masa y las relaciones interregionales de tales partículas individuales pueden ser pensadas como las realizadas entre masas.

Entre los aportes más recientes, Fujita y Thisse (2002) afirman que para poder entender la distribución espacial de las actividades económicas (especialmente la aglomeración económica, la especialización regional y el comercio) se debe asumir que 1) el espacio es heterogéneo (lo cual es característico de la teoría neoclásica del comercio internacional), 2) que existen externalidades en la producción y el consumo (lo que es tomado de la economía urbana) y 3) que los mercados son de competencia imperfecta (como asumen los teóricos de la nueva geografía económica). Si se analiza a la TLC, se observa que el primero de tales supuestos no es tomado en cuenta, pero el segundo, aunque no es tan explícito, sí es considerado por algunos como una razón de peso para estudiar el comportamiento entre lugares centrales y su influencia en las decisiones de producción y consumo sobre otros lugares centrales. Frente al tercero, aunque la TLC asume competencia perfecta, las modelaciones que han logrado mejores resultados en la TLC como la de Fujita, Krugman y Mori (1999) han hecho uso de los mercados imperfectos como los de competencia monopolística, por lo que sería un punto a tener en cuenta para efectos del desarrollo de este estudio.

Para hablar de los modelos de centro-periferia se debe hablar primero de los modelos de política y desarrollo regional a los que ellos pertenecen. Los modelos de política y desarrollo regional se dividen en aquellos que promueven el crecimiento económico y el crecimiento de las áreas geográficas menos favorecidas por medio de recursos de otras regiones (desarrollo exógeno) y los que lo promueven a través de entes propios (desarrollo autóctono). Dentro de los modelos de desarrollo regional exógeno está el de los polos de desarrollo de Perroux (1964) en los que hay un conjunto industrial

encadenado a una dinámica industrial central donde la concentración geográfica es el factor de desarrollo. En este, Boudeville (1966) es el encargado del aporte geográfico con base en la tesis de la causación acumulativa. Más adelante, Berry (1972) determina los canales de difusión del crecimiento y al final, Friedmann (1972) con su modelo de centro-periferia determina las etapas de creación y difusión geográfica de la dinámica económica. Como se nombró antes, se encuentran también los modelos de desarrollo autóctono⁵ y de desarrollo regional, para los que los recursos naturales, las infraestructuras de transportes y comunicaciones, las estructuras urbanas y el capital físico (Wadley, 1986), así como el capital humano, la experiencia organizativa y empresarial y la capacidad innovadora resultan fundamentales para sustentar un desarrollo propio de cada región (Torral, 2001).

Ya para terminar, se encuentra lo que ha sido denominado como Nueva Geografía Económica cuyo exponente más importante es Krugman, que en su artículo de 1991 modeló el impacto de las diferencias geográficas sobre las económicas. Tal modelo consta de dos sectores, uno tradicional y competitivo con un bien homogéneo y sin costos de transporte y otro industrial con productos diferenciados y costo de transporte⁶. Según Krugman (1991), habría una fuerza centrípeta o de tamaño de mercado que causaría la aglomeración geográfica, la cual crece conforme haya mayor gasto industrial y se refuercen las economías de escala⁷; en contraposición, habría una fuerza centrífuga que dispersaría las actividades y es generada por la competencia entre las firmas, la demanda de bienes industriales por el sector agrícola y el menor salario de la mano de obra en la periferia⁸. Dentro de esto, hay dos tipos de equilibrios, uno del centro-periferia donde la industria se concentra en una sola región y el efecto del tamaño del mercado domina y otro simétrico donde hay competencia entre firmas y resulta ser inestable. Cuando una región es favorecida, la industria se concentra por el abaratamiento de la mano de obra (o la facilidad en la movilidad), por los costos del transporte o porque aumenta el gasto industrial y las economías de escala. Algunos

5 Como exponentes de esta vertiente están Coffey y Polèse (1984) y Biehl (1986).

6 Dixit y Stiglitz (1977) habían modelado estos dos sectores, compartiendo con Krugman la utilización de la competencia monopolística.

7 En esta, la existencia de un mayor salario en algún centro o un sitio donde la economía es más grande serviría como un atractor de la mano de obra hacia estos centros.

8 Cabe aclarar que antes de la idea de fuerzas centrífugas y centrípetas que actúan en un centro, Hassinger (1910) ya hablaba de asentamientos centrípetos o pueblos cuyos intereses económicos de su población están dirigidos al centro del asentamiento o poblado y asentamientos centrífugos, cuya área de actividad económica de sus habitantes se enmarca en la periferia.

han utilizado este modelo y han incluido relaciones de interrelaciones verticales entre sectores industriales (*vertical linkages*) en reemplazo de la fuerza centrípeta, en donde las empresas de bienes terminados se ubican más cerca de las empresas que les suministran bienes intermedios (Venables, 1996). Se resalta entonces que junto con los múltiples equilibrios localizacionales, la estructura centro-periferia a favor del centro resulta estable. En este sentido, la aglomeración es un aspecto propio de la realidad espacial y como hace referencia Toral (2001) citando a Myrdal:

La producción industrial tendrá tendencia a concentrarse en aquellos lugares donde existan mercados de gran tamaño, pero el mercado será de gran tamaño en aquellos lugares en que la producción esté muy concentrada. Es el *efecto backward linkage*⁹. Por otro lado, en igualdad del resto de condiciones, será deseable vivir y producir cerca de una concentración de producciones industriales, dado que el precio de los bienes producidos en este lugar central será allí inferior. Es el *efecto forward linkage*¹⁰. El reparto equilibrado de las actividades en el espacio parece, por ello, altamente improbable. (p. 79)

B. ABORDAJES DE LA TLC DE CHRISTALLER

Luego de hacer una revisión de diferentes autores de la economía espacial, se explorarán algunos de los documentos y artículos que han sido escritos acerca de la TLC de Christaller desde la publicación de su obra cumbre. Se pasará por las comprobaciones de casos de tipo empírico hasta llegar a los de tipo teórico, al ser estos últimos un poco más escasos pero igualmente ricos en aporte. Cabe aclarar que en la comunidad científica especializada, todavía no hay consenso acerca de cuál es el modelo o la estructura microeconómica que mejor describe y reúne la TLC de Christaller. Con esto, no se pretende insinuar que esta propuesta de investigación sea la solución a este inconveniente, si no que constituye una alternativa de modelación que recoge ciertos aspectos fundamentales de la teoría.

9 Vinculación hacia atrás: el tamaño del mercado atrae más productores.

10 Vinculación hacia adelante: la concentración de productores atrae más consumidores y por tanto, agranda el tamaño del mercado.

Frente a esto se han encontrado artículos que tratan de hacer aportes teóricos y recogen las ideas de Christaller. Tal vez la primera aproximación en términos de modelación es la de Eaton y Lipsey (1982), para los cuales la teoría de Christaller no es una teoría del comportamiento económico espacial, sino una serie de brillantes conjeturas acerca de los aspectos de localización que se derivan de tales comportamientos. El propósito de Eaton y Lipsey (1982) era proponer un modelo económico de los lugares centrales, teniendo en cuenta el comportamiento maximizador de los agentes, en el cual se vislumbren las limitaciones que trae la modelación de esta teoría. Como los mismos Eaton y Lipsey (1982) reconocen, su teoría propuesta aunque guarda similitud con Christaller porque el equilibrio encontrado satisface el principio jerárquico, se aleja bastante de su propuesta, ya que parte de la necesidad de explicar el comportamiento de los agentes a través de externalidades de demanda creadas por las compras multipropósito de los agentes (la idea de ir a un sitio de mercado y que el agente pueda comprar varios tipos de bienes), lo cual la TLC no considera. Más aún, a pesar de que Eaton y Lipsey (1982) consideran a su modelo como primitivo y que debería ser considerado como un primer intento de modelación de la TLC, consideran que es importante proveer una teoría de los lugares centrales del comportamiento económico, con miras a entender mejor el fenómeno en el mundo real.

Algunos como Michael Sonis (2005)¹¹ han realizado alguna aproximación de la Teoría de los Lugares Centrales de Christaller y Lösch, basándose en argumentaciones de tipo geométrico, parecidas a las de las teorías de la combinación poliédrica de Weyl (1935). Sonis (2005) es considerado como la aproximación geométrica de las tesis de Christaller y Lösch, cuyos trabajos en principio eran también de tipo geométrico. Por su parte, Beckmann-McPherson (1970) describen un lugar central que utiliza el principio de posible cubrimiento del plano por hexágonos de tamaños enteros pero variables entre sí, en donde los centros vendrían a ser los vértices del entramado triangular del modelo de Christaller. A pesar de las contribuciones hechas por Sonis (2005), Weyl (1935) y Beckmann-McPherson (1970), estas han dejado de lado dos aspectos centrales que planteaba Christaller: la maximización de beneficios para las firmas oferentes de servicios y la minimización de costos de transporte por

11 Sonis (2005) recopila en su artículo los aportes de Weyl (1935), Beckmann-McPherson (1970) de tipo geométrico, así como los de tipo geométrico y teórico de Christaller y Lösch, por medio de una descripción amplia de las configuraciones espaciales de tipo hexagonal que hablaban estos autores y de cómo estas se generaban.

parte de los consumidores, proceso que, finalmente, determina la configuración de los lugares centrales y de las jerarquías entre las ciudades.

Por otro lado, autores como Bogataj y Usenik (2005) han hecho aportes importantes a la modelación de jerarquías espaciales en el mercado por medio de juegos dentro de la lógica difusa. En la misma línea, Bogataj y Bogataj (2001) han realizado una leve exploración de los lugares centrales con el uso de juegos espaciales, pero no tan enfocados en los planteamientos de Christaller. Bogataj y Bogataj (2001) presentan un método cuantitativo para construir el modelo de jerarquías espaciales como producto de juegos espaciales, en el cual el problema del viaje del consumidor ayuda a definir el área del mercado. La idea de Bogataj y Bogataj (2001) es que las villas o condados más pequeños producen el bien tipo TY , las siguientes villas más grandes producen los bienes TY_A y TY_B y exportan el bien TY_B a las villas más pequeñas, las siguientes más grandes producen los tipos de bienes TY_A , TY_B y TY_C , exportando TY_C y así. Para los autores, el área de mercado de los bienes es el resultado de la competencia de oligopolio espacial. Los modelos espaciales describen la atracción y, por consiguiente, mayor área de mercado de los lugares centrales. El objetivo de la modelación es mirar cómo deben ser los parámetros entre dos lugares centrales para determinar en dónde se realiza tal o cual producción de un bien, esto es, qué tipo de bienes produce, lo que en últimas determina el nivel jerárquico de cada lugar central. En esta modelación se hace un análisis de insumo-producto para investigar el comportamiento del consumidor cuando las empresas (jugadores) compiten por ellos y existe una demanda incierta que lleva a una escasez de bienes. La competencia se da entre dos firmas y para los autores, la teoría es válida solo si el área total del mercado de las dos es constante (ya que habría una distribución simétrica de consumidores a sus alrededores). Además, los autores sugieren que si se quiere mirar la dinámica entre uno o ambos jugadores dentro del área de mercado de un tercer lugar central, se debe usar la teoría de juegos diferenciales.

Otro aporte ha sido el realizado por Garrocho (2003), el cual propone la Teoría de Interacción Espacial (TIE). En ella se muestra, de manera sencilla, a la TLC de Christaller y otras teorías de localización (geografía clásica, Ricardo y Thünen) como casos especiales de la TIE. Según Garrocho (2003), la TIE logra sintetizar todos los enfoques de la geografía comercial y de jerarquías de ciudades, además de que tiene una ventaja significativa en la planeación, ya que logra “traducir los conceptos teóricos en modelos espaciales de simulación de mercados” (Garrocho, 2003, p. 206). Otro aporte destacable es el de Allen y Sanglier (1981) para los que los

lugares centrales surgen producto de factores determinísticos y probabilísticos y la solución no sería única.

Finalmente, se encuentra el documento de Fujita, Krugman y Mori (1999) que muestra la formación endógena de un sistema jerárquico urbano como resultado de un proceso de ajuste dinámico en un modelo de equilibrio general. Dicho proceso lleva a la localización de las industrias urbanas y de sus trabajadores. Este modelo sería una extensión al caso con múltiples industrias y múltiples ciudades del modelo de Competencia Monopolística de Fujita y Krugman (1995). Sin embargo, las fuerzas de aglomeración espacial hacen que cada ciudad creada cree un efecto de encerramiento donde se establezca. Es por esto que la determinación de su localización depende de dónde se ubique en principio y no se puede especificar una única ubicación de equilibrio para la ciudad. Para solucionar este inconveniente de las ciudades se hace uso del ajuste dinámico, el cual determina la localización de la industria urbana y de sus trabajadores. En este caso, la fuerza de aglomeración principal es la diversidad de productos en bienes de consumo fabricados; entretanto, la expansión de las tierras agrícolas lleva a la dispersión de la localización de la producción. Para estos autores, la gran cantidad de bienes manufacturados, con diferentes grados de diferenciación y diferentes costos de transporte y las economías de escala en la producción de los bienes manufacturados, lleva a que conforme la población de una economía crece, surja un sistema urbano jerárquico a la Christaller por sí mismo. La idea es que cada industria tiene su curva de mercado potencial (normalizada a 1) y el crecimiento poblacional lleva a una expansión de la frontera agrícola, aumentando la curva potencial de la industria. En el punto en que las curvas potenciales de las industrias se acercan a 1, surge una configuración monocéntrica a la von Thünen. No obstante, cada industria tiene una curva potencial diferente y, por ende, una distancia potencial y población crítica distinta. Por lo tanto, a medida que estas alcanzan un valor mayor a 1 cuando la población alcanza cierto punto, el sistema se vuelve inestable y lleva a una configuración de varias ciudades, las cuales contienen únicamente industrias de nivel 1. Las simulaciones de los autores muestran que a medida que la frontera agrícola se mueve hacia afuera, empieza a ser atractivo para las industrias de nivel 2 ubicarse en otras ciudades pequeñas¹² y obtener otros mercados. Se tendría entonces un proceso en el que el crecimiento poblacional genera un patrón de muchas ciudades pequeñas que tienen industrias de nivel 1, seguidas por una ciudad más grande que las contiene y contiene industrias de nivel 2 y así hasta

¹² Las industrias de nivel 2 surgen por la decisión de las de nivel 1 de ubicarse en otras ciudades de orden pequeño, esto es, se transforman de nivel 1 a nivel 2. Además, tales industrias nuevas producen bienes de un nivel mucho mayor.

ciudades de mayor orden. Se destaca además, que las industrias de tipo 2 deciden establecerse en ciudades de orden más bajo, por la creciente demanda de bienes en tales ubicaciones (es de esperar que aumenten).

Según Fujita, Krugman y Mori (1999), aunque Lösch muestra que la conformación de una forma hexagonal es eficiente para los lugares centrales, no es capaz de mostrar que tal configuración surge de un proceso descentralizado. De igual forma, Christaller habla de la distribución de una estructura jerárquica para la TLC, pero no muestra como esta surge de un proceso de decisiones individuales.

III. TEORÍA DE LOS LUGARES CENTRALES. LA VISIÓN DE CHRISTALLER

La TLC de Christaller se caracteriza por estudiar la distribución espacial de las ciudades o lugares centrales; en particular el surgimiento de jerarquías de ciudades con diferentes tamaños, las cuales se producen por la interacción entre las diferentes jerarquías de servicios que produce cada lugar central. Al ser una teoría de localización espacial, la centralidad tiene un papel fundamental el cual establece su posición y el tipo de actividades económicas dentro del sistema, así como sus relaciones con los otros lugares centrales. Para Christaller (1933), la centralidad se refiere menos a la localización espacial central y más a la función de centro que es capaz de ejercer ese lugar central. La importancia de un lugar central está en función del tamaño del lugar y estos están, a su vez, determinados por la dimensión espacial del área y de la altura¹³ y no tanto con respecto al número de habitantes con que cuente un lugar central (a no ser que se considere a los habitantes en términos de su ingreso)¹⁴. De tal forma, podrían existir lugares que son centros en términos geométricos dentro de una región, pero no ser un lugar central, ya que no cumple su función de centro, de lugar centralizador de los bienes y servicios.

Pero así mismo como se habla de bienes y servicios centrales, también se habla de bienes y servicios dispersos, es decir, aquellos que son ofrecidos y producidos en

¹³ Aunque Christaller (1933) no es claro frente a qué se refiere con la dimensión espacial en términos de altura de un lugar.

¹⁴ Christaller da una definición de importancia de un lugar central y llama a B la importancia agregada de un lugar central (o importancia absoluta) y Bz la población de un poblado, siendo entonces $B-Bz$ el excedente de importancia para la región que lo rodea (o importancia relativa).

lugares esparcidos sin ningún orden (en contraposición a lo que se tiene con los lugares centrales). Se dice también que existen bienes y servicios indiferentes, los cuales no son ofrecidos ni producidos de forma central o dispersa.

Según Christaller (1933), los bienes y servicios centrales son aquellos que son ofrecidos y producidos en forma centralizada, pero pueden existir algunos que son ofrecidos en forma centralizada, pero su producción no, por lo que se dice que su ofrecimiento es central, mientras que hay otros que no son ofrecidos en forma centralizada, pero si son producidos de forma central, por los cuales se dice que son centrales en su producción.

A. SUPUESTOS BÁSICOS Y LA INCORPORACIÓN DE LA IDEA DE UMBRAL Y ALCANCE

Los supuestos básicos que toma Christaller (1933) son:

- Una superficie isotrópica.
- Población igualmente distribuida.
- Poder de compra similar de todos los consumidores, los cuales son racionales y se dirigen al mercado más cercano.
- Costos de transporte igual y proporcional a la distancia del consumidor al mercado.
- No hay beneficios económicos (competencia perfecta).

Este último supuesto es relajado por Fujita, Krugman y Mori (1999) al modelar sus planteamientos desde la competencia monopolística (supuesto que se pretende cambiar más adelante). De igual forma, Christaller introdujo el concepto de racionalidad económica para los individuos que actúan en los lugares centrales.

Como se mencionó, esta teoría parte de la idea de un lugar central que es capaz de ofrecer distintos tipos de servicios (cabe aclarar que estos lugares no tienen que ser todos de los mismos tamaños). Hay servicios básicos o de orden más bajo y servicios especializados o de orden más alto y además, un servicio de orden mayor se encuentra rodeado de servicios de orden más bajo. Por otro lado, existen asentamientos de orden mayor o de orden menor, de acuerdo a los servicios que ofrece cada uno. En esta, el lugar central o ciudad se convierte en un centro de intercambio capaz de abastecer a su población y a sus alrededores rurales, lo que Christaller denomina como la región complementaria. Es decir, aquella zona para la cual un lugar central es el centro de

abastecimiento en donde se consideran las interrelaciones mutuas entre los poblados y las regiones (aunque Christaller habla de países, parece más coherente pensar en regiones). De igual forma, así como existen lugares centrales de orden mayor o menor, según el tipo de bien o servicio que ofrezcan, se habla también de regiones complementarias de orden mayor y de orden menor, según el tipo de lugar central que abastezca a la región. En la región complementaria se destaca la existencia de servicios o bienes centrales que son los que dan la jerarquía al correspondiente lugar central al que pertenecen¹⁵, es decir, la centralidad y jerarquía de una ciudad o lugar central está dada por la categoría y rango de bienes y servicios que es capaz de producir y ofrecer.

La decisión de establecerse para las empresas está determinada por lo que se denomina umbral de demanda mínimo, es decir, la población más pequeña a la que una empresa le puede prestar un determinado servicio, de forma tal que la firma alcance un punto de equilibrio entre gastos e ingresos.

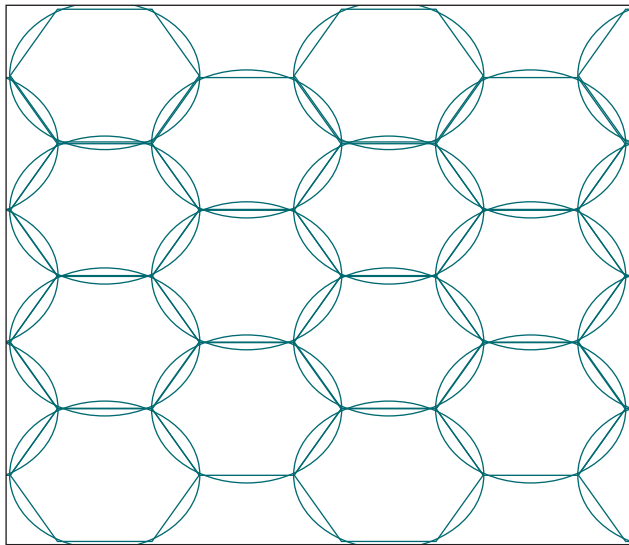
Entonces, habrá un umbral distinto para cada firma y para cada servicio, el cual dependerá del precio del servicio que se ofrece y del costo de transporte que tengan que incurrir los agentes para poder acceder a la zona del umbral de las empresas. Christaller (1933, p. 22) habla de la importancia de la distancia física, para luego llegar a la distancia económica. Esta está determinada por los costos de aduana, aseguramiento y almacenamiento, considerando también la pérdida de peso, espacio y gasto de tiempo en el tránsito de una mercancía; es decir, trata a la distancia económica en términos de los costos de transporte. Tal umbral depende de la especialización de los bienes y servicios: los más especializados requieren un umbral más alto, ya que son usados menos frecuentemente por la población. Por el otro lado, la distancia máxima a la que se puede desplazar un agente para adquirir un servicio se denomina alcance físico del mercado. En consecuencia, una firma ubicada en un determinado lugar central se espera que supla las necesidades de un servicio a la población concentrada en tal lugar central y, en general, a todo el alcance del mercado.

Surge entonces un comportamiento entre empresas e individuos: si hay una situación en la que el alcance del mercado es mayor que el umbral de demanda al que la empresa puede abastecer, entonces existirá una población que no logra ser cubierta por el servicio de la empresa. Por lo tanto, la población más alejada de la empresa tenderá a no trasladarse

¹⁵ Cabe aclarar que la TLC de Christaller es aplicada tanto al sector de servicios como al de bienes de consumo, como afirma el autor en Christaller (1933, p. 20), y no exclusivamente al sector de servicios como afirman algunos autores y que al parecer hicieron una mala interpretación de Christaller.

para obtener tal servicio. La única forma de que esta población, que no es abastecida por la empresa, se desplace para adquirir este servicio sería que otras empresas de servicios del mismo tipo surgieran y pudieran abastecerla hasta lograr un equilibrio. Al ubicarse otras empresas, cada una con su umbral, se establecen dentro del espacio isotrópico configuraciones de forma hexagonal en la prestación del servicio.

Figura 1
Configuración de las áreas circulares a las hexagonales para lugares centrales del mismo orden.



Fuente: Christaller (1933). La construcción es elaboración propia.

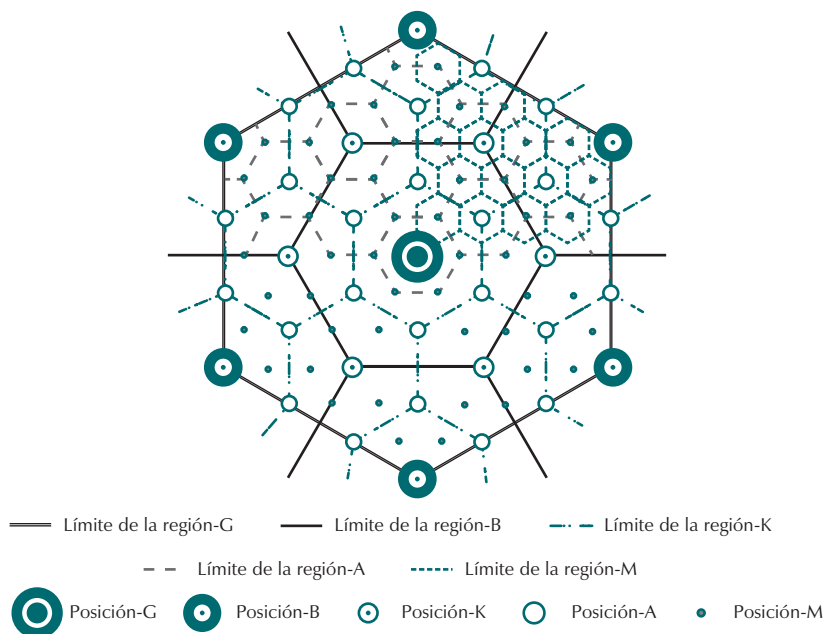
La Figura 1 muestra lugares centrales del mismo nivel o del mismo orden. A medida que los lugares centrales se van instalando y llegan a acercarse (teniendo en cuenta que las formas circulares son determinadas por el umbral de mercado de cada uno de los lugares centrales), se arma el entramado de formas circulares juntas. Sin embargo, tal distribución hace que existan zonas no abastecidas entre un lugar central y otro o zonas que pertenecen tanto a un lugar central como a otro, por lo que se dice que es más eficiente que el entramado se convierta en uno hexagonal que hace que esas zonas no abastecidas lo sean.

Finalmente, el precio del servicio suministrado por la empresa determina el umbral necesario para que esta permanezca en el lugar central. Un mayor precio significa que la empresa necesita un mayor umbral de demanda mínimo para poder permanecer

en el mercado, pero al mismo tiempo significa que los individuos se encuentran más alejados de esta, por lo que el alcance del mercado es mayor también. En otras palabras, entre más alejados estén los individuos del lugar central que abastece un servicio, mayor será el precio que tendrán que pagar debido a los costos de transporte en los que tienen que incurrir. Como se asume un espacio isotrópico y cada empresa tiene el mismo precio (competencia perfecta), el precio que desembolsan los agentes para adquirir un servicio variaría de un lugar central a otro de acuerdo a los costos de desplazamiento en los que incurren los agentes, al ser estos costos mayores cuanto mayor sea la distancia que tienen que desplazarse. Por ende, a los agentes les sale más barato tratar de desplazarse a los lugares centrales más cercanos a su sitio de ubicación.

Tales relaciones permiten vislumbrar el establecimiento de una jerarquía de lugares centrales, en donde los lugares centrales de mayor orden son los más grandes pero menos numerosos; mientras los lugares centrales de primer orden son los más pequeños y numerosos. Por lo tanto, existirá un lugar central de orden mucho mayor a todos, el cual contará u ofrecerá todos los servicios de los de los órdenes inferiores (Figura 2). Es de esperar también que cuanto mayor es un lugar central más población tiene.

Figura 2
Sistema de lugares centrales con diferentes niveles de jerarquías



Fuente: Christaller, 1933, p. 66.

Además, se afirma que tal configuración en jerarquías de ciudades debida a los lugares centrales puede ser vista como el efecto de las economías de aglomeración, lo que hace que se efectúe una oferta adecuada de los servicios. Esta visión también puede ser asociada con la idea de grandes ciudades, ya que estas necesitan mercados de gran tamaño, lo cual va en concordancia con los requisitos que piden los centros de población numerosos.

El crecimiento de las ciudades, desde esta perspectiva, estaría en función de la especialización de las ciudades como prestadoras y ofrecedoras de gran variedad de servicios. Es decir, el centro urbano se convierte en un oferente de servicios para una gran cantidad de población de una región, brindan cada vez una mayor cantidad de servicios (especialización).

B. LOS PRINCIPIOS DE ACOMODAMIENTO DE LOS LUGARES CENTRALES

Para Christaller (1933), los lugares centrales se acomodan u organizan de acuerdo con tres principios: el principio de mercado, que abarca las relaciones o conexiones que pueden existir entre los lugares centrales de diferente nivel jerárquico; el principio de tráfico, que tiene en cuenta más las vías o conexiones de tráfico que pueden existir en la realidad entre los lugares centrales y el principio administrativo, que considera los límites territoriales que tienen los distritos o ciudades; lo cual determina el entramado y la influencia de los lugares jerárquicos de mayor tamaño sobre los lugares centrales de menor jerarquía (Christaller, *Ibíd.*, p.58).

1. El principio del mercado (sistema $k=3$)

Establece que hay tres tipos de centros de servicios o bienes. El primero que ofrece bienes y servicios de primer orden, otro de segundo orden ofreciendo bienes y servicios de segundo orden, uno de tercer orden que ofrece bienes y servicios de tercer orden y así. Esto hace que se establezca una jerarquía en la cual entre menor es el orden del lugar central, menor es el número de asentamientos y entre mayor es el orden, más grande es el área servida por ese centro.

La k se refiere al número de niveles jerárquicos que el lugar central de orden más alto sirve. Por ejemplo, $k=3$ me dice que el lugar central de orden más alto o de orden 1

sirve a 3 lugares centrales del orden 2, que cada uno de los lugares centrales de orden 2 sirven a 3 lugares centrales del orden 3 y así sucesivamente, como se aprecia en el siguiente cuadro:

Cuadro 1

Acomodamiento de los lugares centrales de acuerdo al sistema de $k=3$

Tipo de lugar central	Número de regiones complementarias	Número de lugares centrales
1 orden	1	1
2 orden	3	2
3 orden	9	6
4 orden	27	18
5 orden	81	54
6 orden	243	162
7 orden	729	486

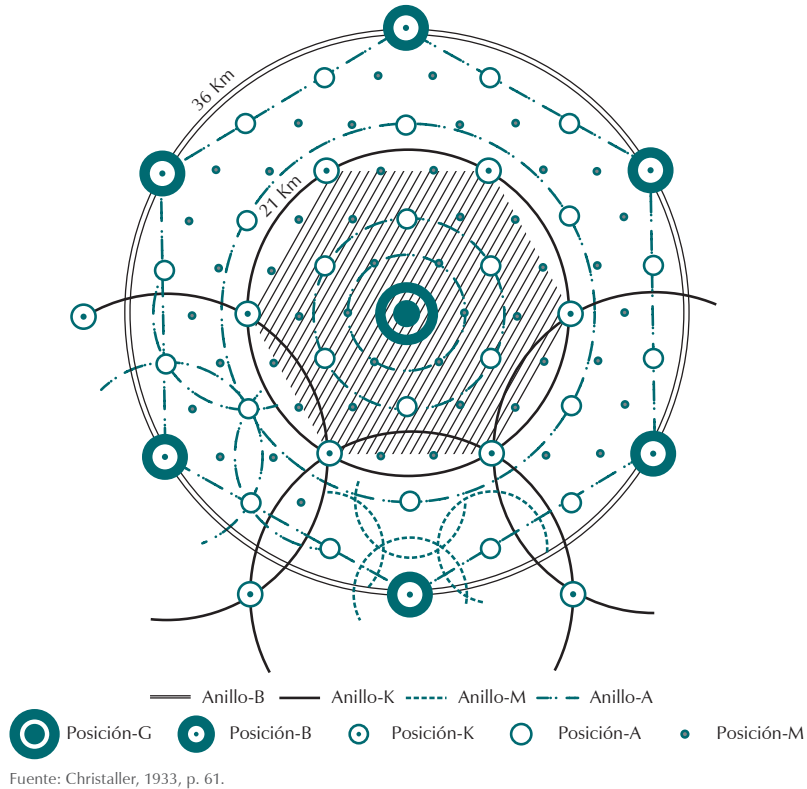
Fuente: Construido con base en Christaller, 1933, p. 67.

En la columna 2, se ve que en cada caso el lugar central de orden 1, por ejemplo, se abastece así mismo y tendría una región complementaria. Si se agregan 2 lugares centrales de orden 2 (columna 3) se tendrá un total de 3 regiones complementarias para el lugar central de orden 1, 2 de orden 2 y ella misma. Continuando con esto, se encuentra que el lugar central de orden 1 cuenta con 729 regiones complementarias y que existen 486 lugares centrales de orden 7.

Por ende, el lugar central de orden 1 sirve a 3 lugares centrales del orden 2 (incluyendo a sí mismo), pero como los lugares centrales de orden 2 abastecen cada uno a 3 lugares centrales del orden 3 (incluidos a sí mismos), entonces el lugar central de orden 1 abastecería a 9 lugares centrales y así sucesivamente. Esto se aprecia en la Figura 3, con la configuración que se da usando el principio de mercado.

En la Figura 3 se aprecia más explícitamente la concepción y la idea que hay detrás de los resultados obtenidos en el Cuadro 1. Por ejemplo, si se toma un lugar central de orden B cualquiera, existe un único lugar central de tipo B bajo su influencia. Se encuentra, además, 6 lugares centrales de tipo K en el anillo de 21 km y dentro de cada B , 6 lugares centrales de tipo A en el anillo de 12 km y 24 lugares centrales de tipo M (6 en el anillo de 7 km, 6 en el anillo de 14 km y 12 en el anillo de 18 km). En la Figura, cada lugar central tipo K pertenece simultáneamente a 3 lugares

Figura 3
Un sistema de lugares centrales de acuerdo con el principio de mercado



centrales tipo *B*, por lo que en realidad el lugar central de tipo *B* tendría bajo su influencia $6/3=2$ lugares centrales de tipo *K*. El lugar central de tipo *B* abastecería a 6 lugares centrales de tipo *A*. Seguidamente, de los 24 lugares centrales de tipo *M* con influencia para el lugar central *B*, tanto los 6 que corresponden al anillo de 7 km como los 6 que están en el anillo de 14 km se encuentran completamente bajo el dominio del lugar central *B*, pero los que se hallan en el radio de 18 km están bajo la influencia de dos lugares centrales de tipo *B*. Si se hace la cuenta, se llega a que la mitad de los lugares centrales de tipo *M* en el radio de 18 km están bajo la influencia del lugar central *B*. En total se tiene 18 lugares centrales de tipo *M* bajo el dominio de nuestro lugar central de tipo *B* (6 en el anillo de 7 km, 6 en el anillo de 14 km y $12/2=6$ en el anillo de 18 km). Al hacer la progresión numérica se llega a los resultados de la columna 3 del Cuadro 1.

2. El Principio del tráfico (sistema $k=4$)

Para Christaller (1933) el acomodamiento del sistema de lugares centrales según el principio de mercado está hecho de acuerdo a las conexiones de las diferentes jerarquías. Sin embargo, podría considerarse otro tipo de distribución si se tienen en cuenta las posibles rutas de tráfico que se podrían establecer entre lugares centrales o poblados del mismo nivel, al ser tales rutas tan baratas y rectas como sea posible y al dejar de lado los lugares menos importantes.

De esta forma, los lugares centrales estarían alineados a lo largo de rutas de tráfico rectas las cuales saldrían en todas las direcciones desde el punto central. Cuando los lugares centrales se distribuyen de acuerdo al principio de tráfico, los centros de más bajo orden están localizados al punto medio de cada lado del hexágono, más que en la esquina. De igual forma que en el caso del principio de mercado, se encuentran las siguientes jerarquías, lugares centrales y regiones complementarias para $k=4$:

Cuadro 2

Acomodamiento de los lugares centrales de acuerdo al sistema de $k=4$

Tipo de lugar central	Número de regiones complementarias	Número de lugares centrales
1 orden (Metrópolis)	1	1
2 orden (Ciudad)	4	3
3 orden (Poblado)	16	12
4 orden (Villa)	64	48
5 orden (Caserío)	256	192

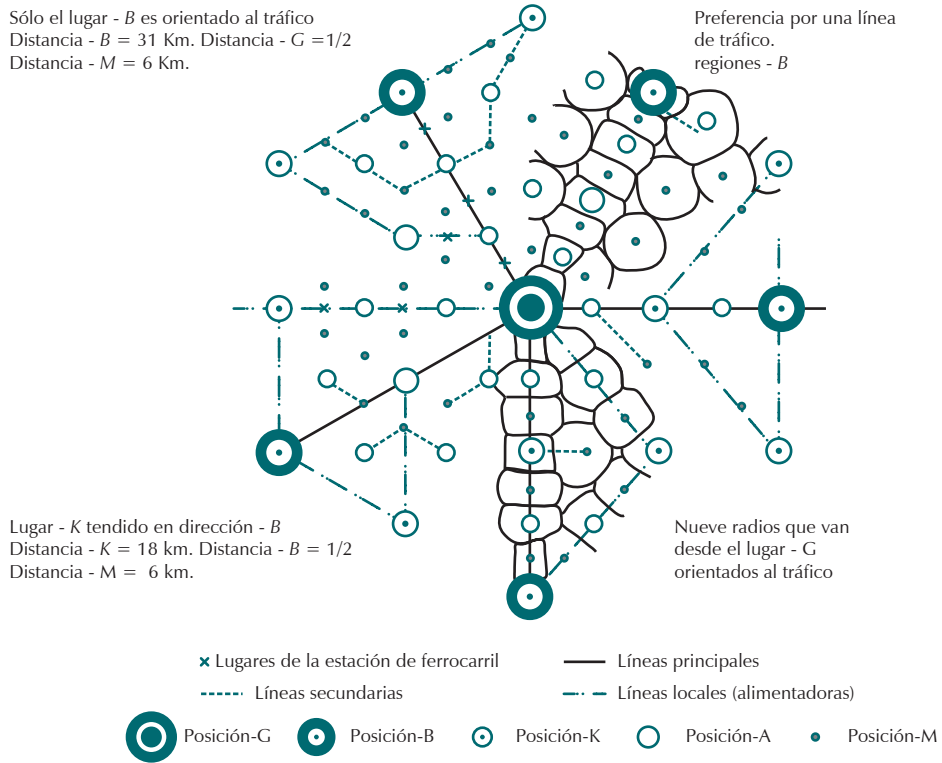
Fuente: Construido con base en Christaller, 1933, p. 67.

La Figura 4 muestra la configuración hexagonal que describe Christaller (1933) para el principio de tráfico.

Cabe anotar también que según Christaller¹⁶ la diferencia fundamental entre el principio de tráfico y el principio de mercado, es que el primero es más lineal, en tanto que el segundo es espacial.

¹⁶ Christaller (1933, p. 77).

Figura 4
Un sistema de lugares centrales de acuerdo con el principio de tráfico



Fuente: Christaller, 1933, p. 75.

3. El principio administrativo (sistema $k=7$)

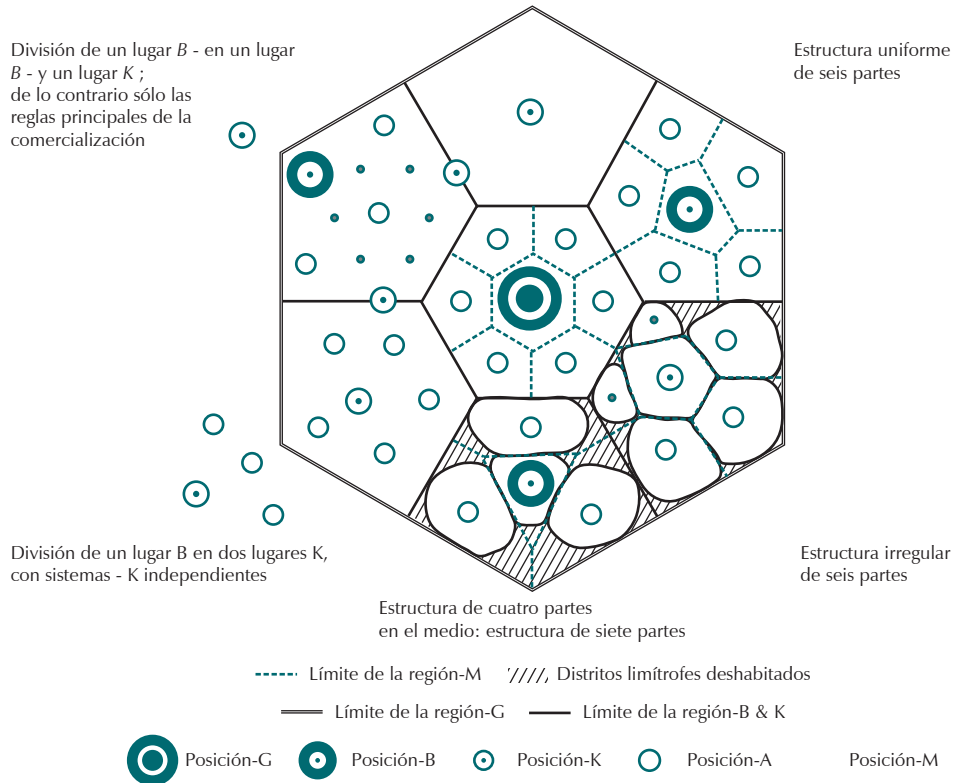
Aunque Christaller (1933) habla de la existencia de un Principio de Separación (el cual contrasta con el principio de mercado), desde un punto de vista más moderno es más un principio de administración, donde el todo (prácticamente sin límites) está organizado en distritos administrativos individuales. La idea detrás del principio administrativo es que se crean distritos con igual población y área en el mismo nivel jerárquico, los cuales están dominados por un centro más importante, de acuerdo a la idea de jerarquías que establecía Christaller (1933). Lo importante de este principio es que considera que los lugares centrales que están bajo el dominio de un lugar central mayor, se encuentran circunscritos completamente dentro del lugar central más grande dentro de su forma hexagonal (por lo que

no son compartidos por otros lugares centrales del orden más grande). Lo que es más realista con el hecho de que los países se encuentran divididos en estados y departamentos y que los condados y municipios y demás se encuentran bajo la jurisdicción e influencia del Estado y departamento. Se omitirá la configuración en términos de regiones complementarias y de lugares centrales con respecto a los niveles jerárquicos que se dan bajo el principio administrativo, ya que se determinan de la misma forma a como se hizo con los dos principios anteriores en los cuadros 1 y 2. En este, cabe recordar que el lugar central de orden mayor domina el equivalente de 7 lugares centrales de orden menor.

Christaller abarca dos tipos de relaciones urbanas claves para el entendimiento de las ciudades: 1) Relaciones interurbanas, es decir, relaciones con otras ciudades y su configuración como sistemas urbanos y 2) Relaciones intraurbanas, que se refiere a las relaciones económicas y de residencia que se dan dentro de las ciudades. La Figura 5 muestra la configuración de los lugares centrales de acuerdo al principio administrativo.

Entre sus conclusiones más importantes se encuentra que las actividades económicas terminan distribuyéndose en términos de la población a la que abastecen los servicios y que las áreas de mercado son determinadas por el desplazamiento de la población hacia uno u otro lugar central, logrando determinar áreas de influencia para cada lugar central y el nivel de jerarquías que se crean entre lugares centrales.

Figura 5
Un sistema de lugares centrales de acuerdo con el principio administrativo



Fuente: Christaller, 1933, p. 79.

IV. MODELACIÓN MICROECONÓMICA DE LA TLC DE CHRISTALLER

Luego de hacer una descripción de los principales planteamientos de la TLC de Christaller se usará la configuración en formas hexagonales para efectuar una aproximación en términos de modelación, por medio de la incorporación de aspectos de los modelos de competencia oligopolística y teoría de juegos.

Para hacer el problema mucho más sencillo de modelar y recoger algunos aspectos de la TLC, se asume en principio que la ubicación de las firmas ya está dada, es decir, ya están ubicadas. Por esta razón el modelo no se concentrará en la toma de decisiones de ubicación de las mismas en principio y se tratará de modelar la

competencia entre firmas por el espacio alrededor de ellas. Acotando un poco más el problema, se decidió estudiar la competencia entre firmas o lugares centrales que están en el mismo lugar jerárquico. Esto es, a pesar de que se reconoce la existencia de niveles y que dentro de lugares centrales de un nivel mayor se encuentran incrustados varios lugares centrales de jerarquía menor, el problema de modelación estará concentrado en la competencia entre lugares centrales del mismo nivel jerárquico.

De igual forma, se toma como base de estudio a un único lugar central, ya que se asumió que todos los lugares del mismo nivel jerárquico cuentan con las mismas características. Este lugar central representativo está rodeado de otros 6 lugares centrales con las mismas características contra los cuales compite para capturar una porción de población a su alrededor. Esto es, me concentraré en las relaciones interurbanas, es decir, las interacciones entre lugares centrales de mismo nivel jerárquico y que crean sistemas urbanos (Hernández, 2006).

Por esta razón se toma, el modelo de competencia en precios descrito por Gabszewicz y Thisse (1992) con algunas modificaciones, para los cuales la competencia espacial tiene que ver mucho con la diferenciación de productos que hagan las firmas, ya que la diferenciación de producto horizontal es coherente con un proceso de competencia espacial en el que las firmas se localizan dentro del subespacio donde se ubican los consumidores; tales modelos fueron promulgados en primera ocasión por Hotelling (1929) y son denominados “Juegos de localización interna”. De igual forma, la diferenciación de producto vertical es correspondiente con la competencia espacial en la que los vendedores se ubican por fuera del área residencial en las afueras de las ciudades, por lo que al mismo precio los consumidores deciden dirigirse al centro de compra más cercano a la ciudad. Estos modelos han sido denominados “Juegos de localización externa”.

De acuerdo con lo anterior, la TLC de Christaller pertenecería a los “Juegos de localización interna”, ya que, como enunciaba Christaller, los lugares centrales se ubican a lo largo del espacio en donde se encuentra distribuida la población.

Por otra parte, la idea de asumir simetría entre las firmas, reduciendo el problema a los lugares centrales de igual jerarquía, y suponer que su ubicación está dada, proviene del hecho de que en ciudades como Bogotá la competencia entre supermercados con características similares (por ejemplo, Cafam, Carrefour, Éxito y Carulla) hace que ofrezcan precios muy parecidos y compitan por las áreas a su

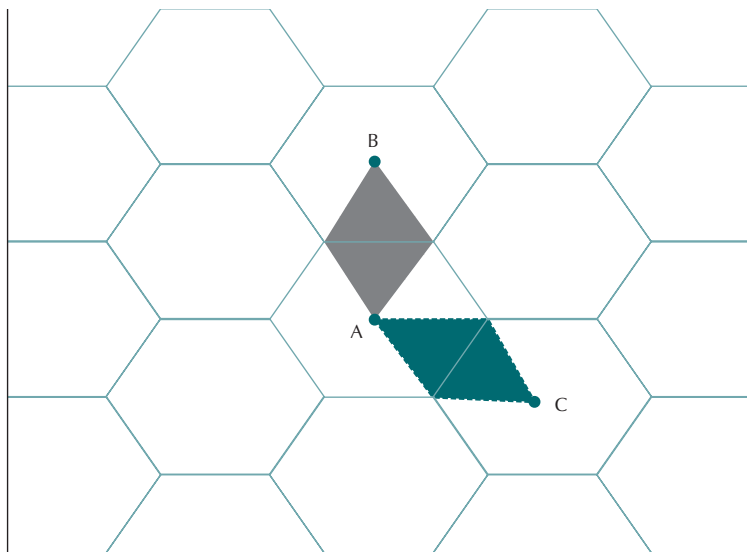
alrededor. Es por esto que cuando un nuevo supermercado decide ubicarse en una zona busca capturar a los consumidores a su alrededor pues, si ya existía un supermercado de estos en la zona, es de esperar que los consumidores se dirijan al supermercado más cercano, dado que ambos ofrecen casi los mismos productos a un precio muy similar y cuentan con las mismas características. Así, se terminarían repartiendo el mercado a su alrededor en partes iguales. Esto es, tienen un cierto poder monopolístico local a su alrededor, pero igualmente se encuentran en competencia.

Se asume, al igual que en Christaller de un espacio isotrópico y la competencia de las firmas por el área de mercado a su alrededor; en donde se espera que los individuos se dirijan a hacer sus compras a las firmas más cercanas en términos de distancia. Aparte, se supone que los individuos están distribuidos en forma regular a lo largo de todo el espacio donde se encuentran las firmas (un continuo de consumidores); es decir, que si se toma dos puntos o áreas X en cualquier parte del espacio donde están las firmas, va a existir la misma cantidad de individuos.

Existen en principio dos vendedores A y B con productos homogéneos con costos de producción 0, instalados a distancias a y b con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a + b \leq 1$. Como se mencionó, se parte de que los vendedores ya están ubicados y compiten en precios (teniendo en cuenta los costos de transporte), así que se asumió que $a = 0$ y $1 - b = 1$, lo cual implica que las 2 firmas se ubican en los extremos. Los consumidores se distribuyen a lo largo de una zona romboidal (Ver Figura 6) de acuerdo a una función de densidad f uniforme, positiva y continuamente diferenciable por la cual compiten A y B . Por lo tanto, se plantea que el área de influencia por la que compiten A y B (poniéndose con un punto verde en la mitad del lugar central donde se ubicaría la firma) es únicamente la que aparece sombreada en gris y lo mismo se tendría para la firma C que colinda con la firma A , cuya área por la cual competirían sería la que aparece sombreada en verde. Si se observa la Figura 6, lo anterior implica que las firmas A y B que compiten por la zona gris se ubican en los extremos de ese rombo.

Por lo tanto, se estaría asumiendo que la configuración de las formas hexagonales de Christaller ya está dada, esto es, las firmas ya están ubicadas. Sin embargo, se intenta mostrar que esa conformación hexagonal es coherente con un equilibrio de competencia oligopolística y que este equilibrio al que se llega por la competencia oligopolística entre firmas está acorde con la configuración hexagonal de la TLC de Christaller.

Figura 6
Configuración hexagonal según la TLC de Christaller y propuesta de modelación



Fuente: La construcción es elaboración propia.

Cada consumidor consume una unidad de mercancía bien sea de A o B , por lo que su decisión es adquirir el bien o servicio a la firma que le ofrezca el precio completo más bajo (precio+costo de transporte) y los costos de transporte los asume él para trasladarse a la firma A o B .

De igual forma que Gabszewicz y Thisse (1992), $C(x)$ es la función de costo de transporte que puede estar en términos de un numerario de compra de una unidad de mercancía a una distancia X . Se asume que $C(x)$ es continua, creciente y convexa en x con $C(0)=0$. Sea P_1 y P_2 los precios completos de A y B y $m(P_1, P_2)$ el consumidor del margen, con $y \in [0, 1]$; entonces es posible definir 3 casos:

$$\text{a) } P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} = P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2}, \text{ donde } m(P_1, P_2) \text{ si existe es único; si no existe,}$$

entonces,

$$\text{b) } P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} < P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2}, \text{ para todo } y \in [0, 1]$$

$$\text{c) } P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} > P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2}, \text{ para todo } y \in [0, 1]$$

Donde $\frac{Dd}{2}$ ¹⁷ corresponde al área del rombo donde se encuentran los consumidores y por el que compiten las firmas A y B (el rombo sombreado de gris).

En el caso a), A obtiene a los consumidores del área $\left[0, m(P_1, P_2) \frac{Dd}{2}\right]$ y B los de

$\left[m(P_1, P_2) \frac{Dd}{2}, 1\right]$, por lo que se está asumiendo que $\frac{Dd}{2} = 1$.

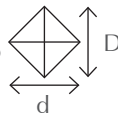
En el caso b), A abastece toda el área $\frac{Dd}{2}$ a los precios (P_1, P_2) , ya que el precio completo que ofrece A es menor que el ofrecido por B y la firma B se queda sin demanda de mercado. En el caso c) sucede lo contrario al caso b).

Las estrategias de las firmas son $P_1 \in [0, \infty]$ y $P_2 \in [0, \infty]$; la función de pago de A es:

$$\pi_1(P_1, P_2) = \begin{cases} P_1 \int_0^{m(P_1, P_2)} f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe} \\ P_1 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} < P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \\ 0 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} > P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \end{cases} \quad (1)$$

La función de pago para la firma B se obtiene de forma similar:

$$\pi_2(P_1, P_2) = \begin{cases} P_2 \int_{m(P_1, P_2)}^1 f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe} \\ P_2 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} > P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \\ 0 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} < P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \end{cases} \quad (2)$$

¹⁷ El área de un rombo se define como $A = \frac{Dd}{2}$, siendo 

El equilibrio Nash-Cournot¹⁸ no cooperativo en precios bajo estrategias puras sería un par de precios (P_1^*, P_2^*) tal que $\pi_i(P_i^*, P_j^*) \geq \pi_i(P_i, P_j^*)$ para todo $P_i \geq 0$ con $i = 1, 2$ e $i \neq j$. Es decir, es el par de puntos (P_1^*, P_2^*) , tales que P_1^* es la mejor respuesta, dado que la mejor respuesta de la firma B es P_2^* y viceversa.

De igual forma que Hotelling (1929), se asume que $C(x)=cx$, con $c > 0$, siendo c la tasa de transporte, por lo que si $m(P_1, P_2)$ existe, se cumple que $a = 0 \leq m(P_1, P_2) \leq 1=1-b$ y $m(P_1, P_2)$ se obtiene despejando a y de $P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} = P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2}$, lo cual daría como resultado:

$$y = m(P_1, P_2) = \frac{P_2 - P_1}{cDd} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

La función de pago para la firma A en el caso a) sería:

$$\pi_1 = \left(\frac{P_2 - P_1}{cDd} + \frac{1}{2} \right) P_1 \quad \text{con} \quad P_1 + c(y) \frac{Dd}{2} = P_2 + c(1-y) \frac{Dd}{2} \quad (4)$$

La función de pago para B se obtiene de forma similar. Resolviendo esto para A y B , se encuentra que:

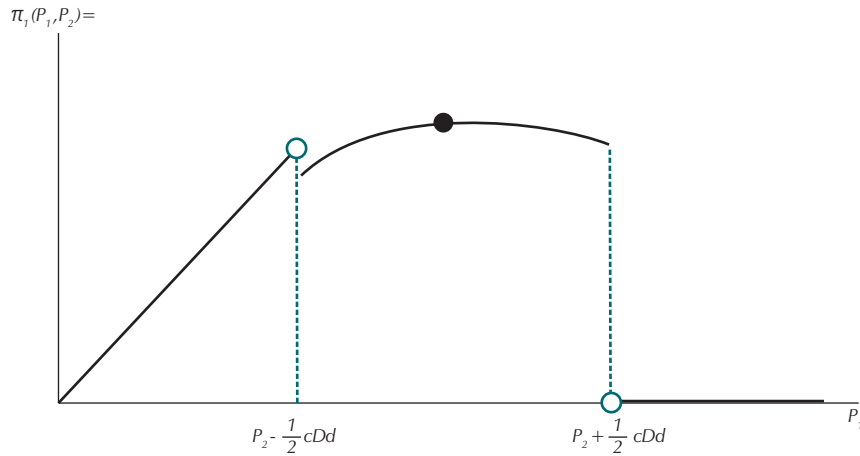
$$P_1 = P_2 = c \left[\frac{Dd}{2} \right] \quad \text{y} \quad \pi_1 = \pi_2 = c \left[\frac{Dd}{4} \right] \quad (5)$$

Es decir, la competencia en precios completos entre las firmas para el caso a) hace que obtengan igualdad en precios y en beneficios, un equilibrio simétrico, en el que como se aprecia en estos resultados, se reparten el área romboidal en mitades.

Por medio de la realización de la gráfica de la función de pagos de la firma A se encuentra que hay dos discontinuidades, donde el equilibrio del juego es el punto negro del Gráfico 1:

¹⁸ Este es la denominación que le da D'Aspremont, Gabszewicz, Jaskold y Thisse (1979).

Gráfico 1
Función de pago de la firma A



Fuente: La construcción es elaboración propia.

La función de pagos cuando existe $m(P_1, P_2)$ es cóncava (esto puede comprobarse sacando las condiciones de segundo orden) y tiene dos cortes con el eje P_1 , pero tiene un único punto donde maximiza la función de pago de la firma A y es en el punto de equilibrio (punto negro del Gráfico 1). De resto, la función de pago de la firma A en la zona de la izquierda del Gráfico 1 muestra que esta firma obtiene un beneficio creciente e igual a P_1 , apropiándose de todo el mercado o abasteciendo a toda el área romboidal, siempre que su precio completo sea menor que el precio completo que ofrece la firma B. De acuerdo a esto, se podría generar una competencia en precios, siempre tratando de bajar levemente su precio con respecto a la competencia para apropiarse de todo el mercado. Por el lado derecho de la función de pago de la firma A, esta obtiene un beneficio de cero ya que no logra apropiarse de la zona de mercado y la firma B abastece toda la zona de mercado, pues establece un precio completo menor al que ofrece la firma A.

En el caso de que la firma A obtuviera todo el mercado, colocando un menor precio que la firma B, se podría apreciar que la firma A empezaría a subir su precio para aumentar su beneficio y la firma B a bajarlo, para tratar de capturar el mercado y se llegaría a una situación donde las firmas iniciarían una guerra de precios que las hiciera bajarlos. Por ejemplo, la firma B lo bajaría a uno menor que el que tenía en principio la firma A, para aumentar su beneficio de cero a P_2 , por lo que la firma A pierde todo su mercado. Sin embargo, las firmas A y B saben que esto las llevaría a

una guerra hasta que ninguna obtenga un beneficio y saben que les conviene más aceptar la situación cuando $m(P_1, P_2)$ existe.

A. CONSISTENCIA DE LOS RESULTADOS

Para revisar la consistencia de los resultados, se revisó el modelo modificando la función de costo de transporte como $C(x)=cx^2$, con $c > 0$, donde c es la tasa de transporte. En este caso, dado que P_1 y P_2 son los precios completos de A y B y $m(P_1, P_2)$ el consumidor del margen, con $y \in [0,1]$, se tienen los mismos tres casos que en la situación donde los costos de transporte eran $C(x)=cx$, con $c > 0$ y la función de pago de A sería:

$$\pi_1(P_1, P_2) = \begin{cases} P_1 \int_0^{m(P_1, P_2)} f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe.} \\ P_1 & \text{si para todo } y \in [0,1] \quad P_1 + c(|y|)^2 \frac{Dd}{2} < P_2 + c(|1-y|)^2 \frac{Dd}{2} \\ 0 & \text{si para todo } y \in [0,1] \quad P_1 + c(|y|)^2 \frac{Dd}{2} > P_2 + c(|1-y|)^2 \frac{Dd}{2} \end{cases} \quad (6)$$

De igual forma que antes $\frac{Dd}{2}$ corresponde al área por la que compiten las firmas A y B . Tal como se definió antes, en el caso a), A obtiene a los consumidores del área $\left[0, m(P_1, P_2) \frac{Dd}{2}\right]$ y B los de $\left[m(P_1, P_2) \frac{Dd}{2}, 1\right]$, por lo que se está asumiendo que $\frac{Dd}{2} = 1$, mientras que en el caso b), A abastece toda el área $\frac{Dd}{2}$ a los precios (P_1, P_2) , ya que el precio completo que ofrece es menor que el ofrecido por B y esta se queda sin demanda de mercado. En el caso c) sucede lo contrario al caso b). Para la firma B se tiene lo contrario, pero como ya se había especificado anteriormente se omitirán los detalles.

Dado que las funciones de pago para las firmas A y B no cambian (excepto en lo que se refiere a la especificación de $m(P_1, P_2)$), se hallará al consumidor del margen para esta situación. De igual forma que antes, $m(P_1, P_2)$ se obtiene del caso a) despejando a y de $P_1 + c(|y|)^2 \frac{Dd}{2} = P_2 + c(|1-y|)^2 \frac{Dd}{2}$, lo cual resultaría en:

$$y = m(P_1, P_2) = \frac{P_2 - P_1}{cDd} + \frac{1}{2} \quad (7)$$

Este resultado es el mismo que se tenía en la situación con costos de transporte lineales, por lo que con esto se demuestra que el problema que se debe resolver y los resultados obtenidos son los mismos que si se usan costos de transporte cuadráticos.

B. EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO

Tomando la proposición ilustrada por Gabszewicz y Thisse (1992) en su modelo y formulada por D'Aspremont *et al.* (1979), las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio en estrategias puras de este modelo serían:

1. Proposición 1¹⁹:

Para $a + b = 1$, el único precio de equilibrio está dado por $P_1^* = P_2^* = 0$. Para $a + b < 1$, hay un precio de equilibrio si y sólo si:

$$\left(1 + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}(a+2b), \quad (8)$$

$$\left(1 + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}(b+2a) \quad (9)$$

Siempre que se cumpla esto, el equilibrio en precios es único²⁰. Como se asumió que las firmas estaban fijas y que se ubicaban en los vértices (ver Figura 5), se asume de

¹⁹Gabszewicz y Thisse (1992). Para ver la prueba de esta proposición ver D'Aspremont, Gabszewicz, Jaskold y Thisse (1979).

²⁰Estas proposiciones se obtienen cuando se impone que la función de pago de la firma *A* en el caso a) bajo el equilibrio sea mayor o igual que el que obtendría en el caso b). Igual se hace con la función de pago de la firma *B*, con lo que se obtienen las dos condiciones.

antemano que $a = 0$ y $1 - b = 1$. Al derivar estas mismas condiciones para el caso particular del modelo se convertirían en:

Para el caso de la firma $A \frac{cDd}{4} \geq 0$, y para el caso de la firma $B \frac{cDd}{4} \geq 0$, (10)
lo cual siempre se cumple.

Como afirma Gabszewicz y Thisse (1992), hay un equilibrio cuando las firmas están localizadas lo suficientemente aparte, una de la otra y para el caso simétrico donde $a = b$, como en esta situación, las desigualdades anteriores imponen que las firmas se localizan por fuera del primer y tercer cuartil. Esto se asumió desde el principio, al decir que estaban fijas en localizaciones tales que $a = b = 0$. En otra situación donde las firmas se ubicaran entre el primer y tercer cuartil, tendrían incentivos a sacar a su competencia del mercado vía competencia en precios.

Por lo tanto, se aprecia que la firma A podría obtener un beneficio mayor, pero la competencia entre las mismas y los costos de transporte que existen hacen que se llegue a un equilibrio con menor beneficio. No obstante, en este equilibrio existe la casi exclusividad sobre el área alrededor hasta la zona límite $m(P_1, P_2)$ o consumidor límite. Es decir, que podrían aumentar su beneficio por medio de la determinación de un precio menor al de su competencia, aunque la opción más recomendada que existe es la repartición del mercado como lo indica el equilibrio.

Si se traslapan estos resultados a la competencia de la firma A con la C se encuentra el mismo tipo de equilibrio; es decir, que se reparten el área de mercado por la que compiten en mitades. Si se hace lo mismo con las 6 firmas con las que compete la firma A y que se encuentran a su alrededor, entonces se encuentra que el área de mercado que abastece la firma A corresponde a la unión de los medios rombos que le pertenecen por competir con las 6 firmas a su alrededor y se tendría la forma hexagonal que promulgaba Christaller.

Como una derivación importante del modelo se encuentra que la distribución hexagonal a la que se llega, en donde las firmas se reparten el mercado o zona por la que compiten uno a uno en partes iguales, permite tener un concepto de vecindad y de contigüidad espacial. Si se traslada esto al análisis matemático, se estaría diciendo que dependiendo de la métrica que se utilice, así mismo sería el concepto de bola abierta y de vecindad que se encuentra o se tiene matemáticamente (Ver Anexo 1).

C. RELAJACIÓN DE LA IGUALDAD EN LOS COSTOS DE PRODUCCIÓN

De igual forma, se decidió revisar qué sucedería si los lugares centrales tienen diferentes costos de producción y revisar los resultados que se obtendrían. Para esto, se modificaron las funciones de pago de las firmas o lugares centrales de la siguiente forma, al ser las estrategias de las firmas $P_1 \in [0, \infty]$ y $P_2 \in [0, \infty]$. La función de pago de A sería:

$$\pi_1(P_1, P_2) = \begin{cases} (P_1 - C_1) \int_0^{m(P_1, P_2)} f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe.} \\ P_1 - C_1 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} < P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \\ 0 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} > P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \end{cases} \quad (11)$$

La función de pago para la firma B se obtiene de forma similar:

$$\pi_2(P_1, P_2) = \begin{cases} (P_2 - C_2) \int_0^{m(P_1, P_2)} f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe.} \\ P_2 - C_2 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} < P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \\ 0 & \text{si para todo } y \in [0, 1] \quad P_1 + c(|y|) \frac{Dd}{2} > P_2 + c(|1-y|) \frac{Dd}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Resolviendo esto para A y B cuando $m(P_1, P_2)$ ²¹ existe, se llega a:

$$P_1 = \frac{cDd}{2} + \frac{2C_1 + C_2}{3} \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{cDd}{2} + \frac{C_1 + 2C_2}{3} \quad (13)$$

$$\pi_1 = \left(\frac{3cDd + 2(C_2 - C_1)}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{cDd} \right) \quad \text{y} \quad \pi_2 = \left(\frac{3cDd + 2(C_1 - C_2)}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{cDd} \right) \quad (14)$$

²¹ $m(P_1, P_2)$ corresponde a la misma condición que se tenía en la ecuación (3), junto con la función de costos de transporte $C(x)=cx$, con $c > 0$.

En este caso, cuando $m(P_1, P_2)$ existe se encuentra que no va a existir una única solución como sucedía antes y que el resultado al que se llegue va a depender de cómo sean los costos de producción de cada firma, esto es, dependerán de cómo sean C_1 y C_2 .

En el caso de que $C_2 = C_1$, se llega al resultado que se había encontrado anteriormente. Cuando estos costos de producción llegan a ser diferentes ($C_2 \neq C_1$), se observa que los dos lugares centrales se reparten el mercado. No obstante, no ocurre en partes iguales como sucedía antes, si no que ahora aquella firma con un menor costo de producción tendrá un margen mayor para bajar el precio y se apoderará de una cantidad mayor de la zona romboidal. Esto se da sin desplazar completamente a la otra firma o lugar central, gracias a la existencia de los costos de transporte en los que incurren los consumidores para adquirir el bien.

Para ilustrar lo anterior de forma clara se asume que $C_1 > C_2$, más específicamente $C_1 = C_2 + \varepsilon$, donde ε es un número bastante pequeño. Es decir, la firma B tiene un costo marginal de producción menor que la A . De acuerdo a esto, los precios y las funciones de pago para A y B serían:

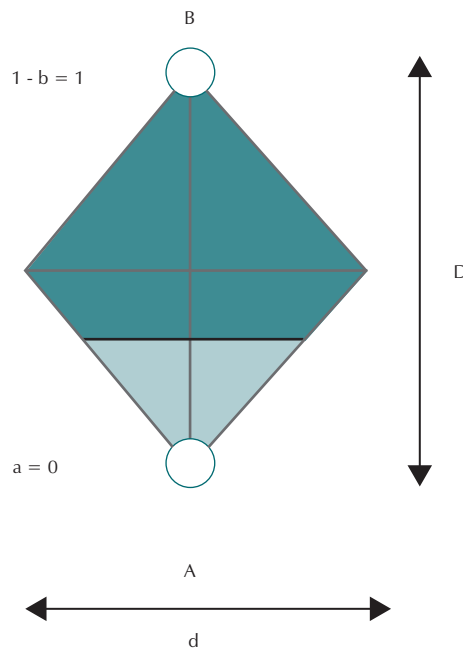
$$P_1 = \frac{cDd}{2} + \frac{3C_2 + 2\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{cDd}{2} + \frac{3C_2 + 2\varepsilon}{3} \quad (15)$$

$$\pi_1 = \left(\frac{3cDd - 2\varepsilon}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{cDd} \right) \quad \text{y} \quad \pi_2 = \left(\frac{3cDd - 2\varepsilon}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{cDd} \right) \quad (16)$$

Cuando hay diferencia entre los costos de producción, siendo $C_1 = C_2 + \varepsilon$, se encuentra que la firma B termina ofreciendo en equilibrio un precio menor que la firma A ($P_1 > P_2$), debido a que tiene unos costos marginales de producción menor que su competencia. Esto hace que, efectivamente, la firma B tenga un mayor margen para ofrecer un menor precio y termine obteniendo un beneficio superior como se aprecia en (16). En la medida en que la diferencia de costos sea mayor, así mismo será la diferencia en precios y la firma B podrá obtener un beneficio considerable y, por consiguiente, se quedará con una mayor cantidad del rombo, como se muestra en la Figura 7. El área sombreada de verde claro corresponde a la zona que abastecería la firma o lugar central A , mientras que la sombreada de verde oscuro corresponde a la zona que abastecería la firma o lugar central B .

Este resultado hace pensar que las diferencias en costos de producción entre las firmas harían que se rompiera la configuración hexagonal de la que hablaba Christaller y que para que esta se dé es necesario que las firmas tengan costos de producción iguales.

Figura 7
 Repartición entre las firmas *A* y *B* de la zona romboidal con diferencias en los costos de producción



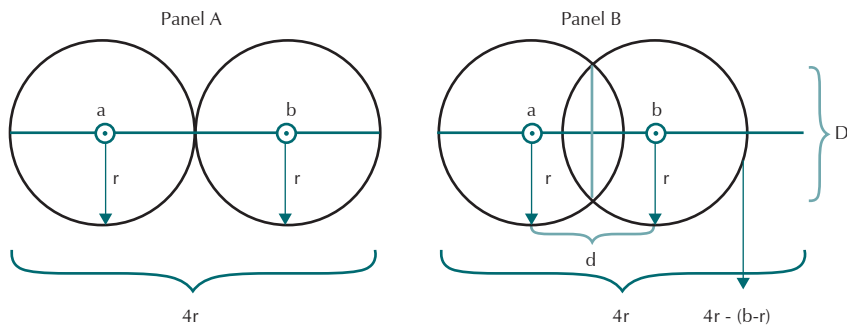
Fuente: La construcción es elaboración propia.

Ahora bien, en los otros casos cuando $m(P_1, P_2)$ no existe se mantienen iguales, con la diferencia de que ahora los beneficios o las funciones de pago para cada firma o lugar central se ven modificados en un monto igual a los costos de producción marginales que tiene cada una. Igual que antes, unos precios compuestos diferentes $\left(P_1 + c\left(\left| y \right|\right) \frac{Dd}{2} \neq P_2 + c\left(\left| 1 - y \right|\right) \frac{Dd}{2} \right)$ implicarían situaciones de desequilibrio o inestabilidad en el que las firmas o lugares centrales entran en una guerra en precios para tratar de capturar toda la zona de mercado.

D. MODELACIÓN ALTERNATIVA

En el modelo base se partía de que la localización de las firmas estaba dado, más exactamente, que se ubicaban en los vértices o puntos extremos del área romboidal por la cual competían. En esta modelación alternativa se mostrará que la localización del lugar central A está dada y que lo óptimo para el lugar central B es ubicarse a una cierta distancia que es acorde con los resultados de Christaller. En principio, el lugar central A se encuentra ubicado en un punto en el espacio isotrópico, llámese a de antemano, y existe un radio r que determina el campo de acción del lugar central. Es decir, este radio está determinado por el umbral y alcance de la firma, lo cual también está ligado a los costos de producción del lugar central. Existe entonces un nuevo lugar central B que quiere entrar al mercado y tiene un radio de acción r igual al del lugar central A . El lugar central B (cuya ubicación se llama b) se ubica a lo largo de una línea que se delimita por la ubicación inicial del lugar central A (cuya ubicación se define como $a = r$) como se muestra en la Figura 8.

Figura 8
Localización de los lugares centrales a lo largo de una línea recta



Fuente: La construcción es elaboración propia.

Efectivamente, el lugar central B puede ubicarse en cualquier parte de esta línea. Esto al tener en cuenta que b es la distancia desde el extremo derecho $4r$ hacia la posición que tiene el lugar central A , es decir, el punto a . Dado esto, se restringe $b \geq r$ para que toda el área del lugar central quede, a lo menos, contenida entre la línea $4r$.

Con esto en mente se definen, nuevamente, las funciones de demanda para el lugar central A y el lugar central B de la siguiente forma: al ser las estrategias de las firmas

$P_1 \in [0, \infty]$ y $P_2 \in [0, \infty]$. Igualmente, hay que tener en cuenta que $4r-(b-r)$ sería la distancia máxima que habría desde el extremo izquierdo hasta el extremo derecho y por el que estarían compitiendo los lugares centrales A y B (ver Figura 8). Si $b=r$ entonces la distancia máxima es $4r$. Por ende, la función de pago de A sería:

$$\pi_1(P_1, P_2, b) = \begin{cases} P_1 \int_0^{m(P_1, P_2)} f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe.} \\ P_1 \int_0^{4r-(b-r)} f(z) dz & \text{si para todo } y \in [r, 4r-(b-r)] \quad P_1 + c(|T_A(y, b, r)|) < P_2 + c(|T_B(y, b, r)|) \\ 0 & \text{si para todo } y \in [r, 4r-(b-r)] \quad P_1 + c(|T_A(y, b, r)|) > P_2 + c(|T_B(y, b, r)|) \end{cases} \quad (17)$$

Donde $T_A(y, b, r)$ y $T_B(y, b, r)$ corresponden a unas funciones que calculan el área entre la ubicación del punto a y $m(P_1, P_2)$, y entre $m(P_1, P_2)$ y la ubicación del punto b , respectivamente.

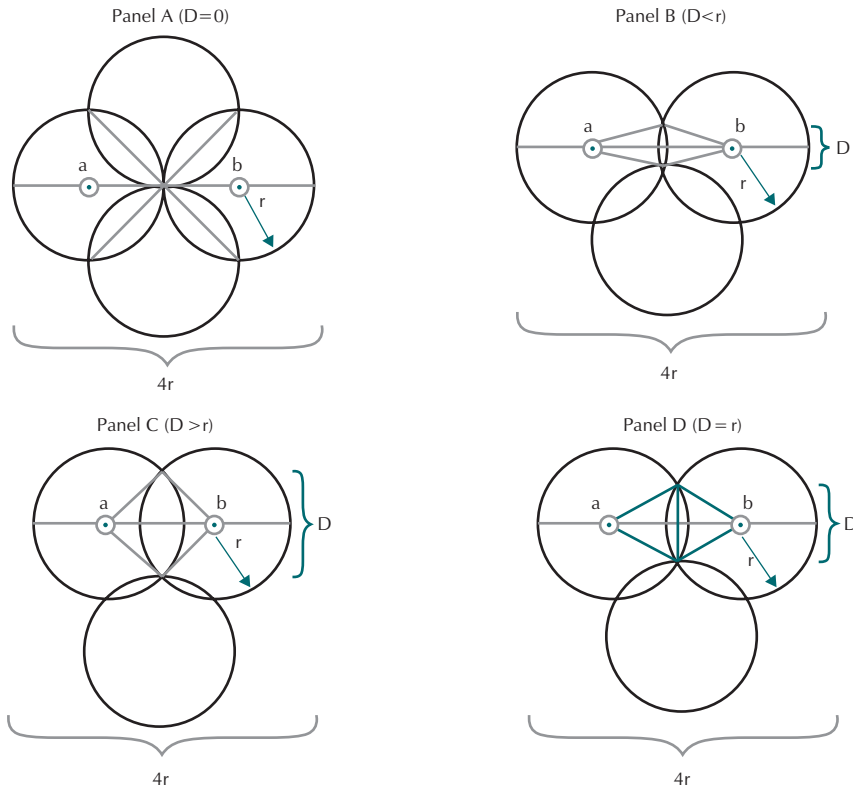
La función de pago para la firma B se obtiene de forma similar,

$$\pi_2(P_1, P_2, b) = \begin{cases} P_2 \int_{\frac{m(P_1, P_2)}{2}}^{4r-(b-r)} f(z) dz & \text{si } m(P_1, P_2) \text{ existe.} \\ P_2 \int_0^{4r-(b-r)} f(z) dz & \text{si para todo } y \in [r, 4r-(b-r)] \quad P_1 + c(|T_A(y, b, r)|) > P_2 + c(|T_B(y, b, r)|) \\ 0 & \text{si para todo } y \in [r, 4r-(b-r)] \quad P_1 + c(|T_A(y, b, r)|) < P_2 + c(|T_B(y, b, r)|) \end{cases} \quad (18)$$

De igual forma que en el primer modelo, d es la distancia entre el punto a y el punto b y D la distancia vertical que se genera entre los puntos en común que tienen las dos circunferencias que determinan el área tanto del lugar central A como el del B (ver Figura 8). Por lo tanto, $0 \leq D \leq 2r$. En una situación donde $D = 2r$, el lugar central B se ubica en el mismo punto que el lugar central A y el área que tomaría cada firma sería igual a $\Pi \frac{r^2}{2}$ (al utilizar la fórmula del área de un círculo).

En el otro caso extremo, si $D = 0$, como se aprecia en la Figura 9, panel A, implicaría que $b = r$ y se formaría otro tipo de formas geométricas (cuadrados simétricos) en la

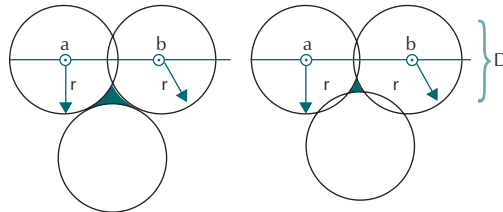
Figura 9
Revisión de los diferentes casos de localización para el lugar central B



Fuente: La construcción es elaboración propia.

medida en que nuevos lugares centrales entren en competencia²². Esta podría ser una solución; sin embargo, como se verá en el caso final, esta es una solución que genera

²² Hay que tener siempre presente que situaciones como las que se muestran a continuación:



no son soluciones debido a que hay zonas sin ser abastecidas (zonas verdes), lo que daría pie a que entraran nuevas firmas o lugares centrales más adelante y se ubicaran allí.

un área de mercado menor que la que obtendrían las firmas en el caso cuando $D = r$. No obstante, se revisarán los demás casos.

Si $D < r$, la forma romboidal que se forma entre la ubicación a y la ubicación b sería más alargada. Como se ve en la Figura 9, panel B, a medida que entran nuevos lugares centrales a competir, las configuraciones que se dan son diferentes y asimétricas; incluso más, se llegaría a que las áreas que alcanzan tanto el lugar central A como el del B serían menores a las que se encontrarían si la forma hexagonal fuera simétrica. Por esta razón esta situación no es una solución. Una situación en la que $D > r$ (ver Figura 9, panel C) llevaría a que, como en el caso anterior, las configuraciones sean diferentes y asimétricas y que las áreas que podrían obtener tanto el lugar central A como el del B serían menores a las que se encontrarían si la forma hexagonal fuera simétrica, por lo que esta situación tampoco es una solución.

Dado que el lugar central B sabe de antemano que nuevos lugares centrales pueden entrar a competir, la situación donde las áreas son mayores para ella es cuando $D = r$. En este caso, se formarían formas triangulares como las que se aprecian en verde en la Figura 9, panel D y el lugar central A y el B se repartirían en partes iguales la zona romboidal (los dos triángulos en verde). Como se aprecia ambos triángulos son simétricos y cada lado sería igual a r , por lo que los tres ángulos de cada triángulo medirán 60 grados. Para determinar la distancia entre el punto a y el b , se usa lo anterior para dividir cada triángulo en dos partes iguales. Al tratarlos como triángulos rectos 90-60-30, sus lados opuestos a cada ángulo serían $2x$, $x\sqrt{3}$, x (o en este caso, r , $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, $\frac{r}{2}$). Con esto, se llega a que la distancia entre el punto a y el b sería $d = r\sqrt{3}$. Igualmente, se sabe que el límite superior de la integral de las funciones de pago para el lugar central A y el B es $4r - (b - r)$ (ver ecuaciones 17 y 18), por lo que se diría que $d = r\sqrt{3} = 4r - r - b$, es decir, $b = r(3 - \sqrt{3})$.

Acorde con lo anterior, la restricción para el consumidor del margen o $m(P_1, P_2)$ sería:

$$P_1 + c\left(\frac{\Pi r^2}{3} + \frac{r(y-r)}{2}\right) = P_2 + c\left(\frac{\Pi r^2}{3} + \frac{r(4r-b-y)}{2}\right) \quad (19)$$

Las partes que acompañan a la función c corresponden a las áreas entre el punto a y $m(P_1, P_2)$ que se apropia el lugar central A y entre $m(P_1, P_2)$ y el punto b las que apropia el lugar central B . Así, al despejar a y de la anterior ecuación, se tiene:

$$y = \left(\frac{P_2 - P_1}{cr} + \frac{5r - b}{2} \right) \quad (20)$$

Cuando se aplica esta ecuación, las funciones de pago para el lugar central A y para el lugar central B cuando $m(P_1, P_2)$ existe serían:

$$\pi_1(P_1, P_2, b) = P_1 \left(\frac{P_2 - P_1}{cr} + \frac{5r - b}{2} \right) \quad y \quad (21)$$

$$\pi_2(P_1, P_2, b) = P_2 \left[4r - (b - r) - \left(\frac{P_2 - P_1}{cr} + \frac{5r - b}{2} \right) \right]$$

Al derivar las funciones de pago con respecto a los precios, se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_1(P_1, P_2, b)}{\partial P_1} = \frac{P_2 - 2P_1}{cr} + \frac{5r - b}{2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \pi_2(P_1, P_2, b)}{\partial P_1} = \frac{P_1 - 2P_2}{cr} + \frac{5r - b}{2} = 0 \quad (22)$$

Al resolver esto para P_1 y P_2 :

$$P_1 = \frac{P_2}{2} + \frac{(5r - b)cr}{4} \quad y \quad P_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{(5r - b)cr}{4} \quad (23)$$

Y la solución que se encuentra es:

$$P_1 = P_2 = \frac{(5r - b)cr}{2} \quad (24)$$

Al reemplazar esto en las funciones de pago, se llega a:

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{(5r - b)^2 cr}{4} \quad (25)$$

Esto indica que los lugares centrales compiten de forma pareja por las zonas que los rodean. El lugar central A compete con B por las zonas que tienen en común; es decir, el área romboidal. Al traslapar estos resultados a la competencia de la firma A con la C se llega a que el mismo tipo de equilibrio donde se reparten el área de mercado por la que compiten en mitades. Si se hace lo mismo con las 6 firmas con las que compete la firma A y que se encuentran a su alrededor, entonces se llega a que el área de mercado que abastece la firma A corresponde a la unión de los medios rombos que

le pertenecen por competir con las 6 firmas a su alrededor, lo cual es consistente con la forma hexagonal que promulgaba Christaller.

V. CONCLUSIONES

Tal vez el aporte más importante del modelo es que da visos de cómo es la competencia entre firmas oligopólicas dentro de la estructura en formas hexagonales que decía Christaller. Explica cómo se comporta y se configura la estructura hexagonal dentro de un modelo de competencia oligopolística en el que las firmas compiten en precios y donde se tienen en cuenta los costos de transporte. Tal competencia las lleva a que se repartan las zonas romboidales en mitades. Asimismo, se presentan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un único equilibrio en un juego estático de precios con diferenciación horizontal. De igual forma y no menos importante, la modelación alternativa que se hace al final de la sección IV permite relajar un poco la decisión de dónde ubicarse para la firma o lugar central B , lo cual da como resultado una configuración hexagonal simétrica y compatible con los resultados obtenidos anteriormente.

De igual forma, Bogataj y Bogataj (2001) asumían la competencia entre dos firmas y afirmaban que su teoría es válida solo si el área total del mercado de las dos es constante, ya que habría una distribución simétrica de consumidores a sus alrededores, lo cual es un resultado similar al encontrado en este modelo.

Por otro lado, se puede ver que en ciudades como Bogotá, los supermercados tipo Cafam, Éxito o Carrefour compiten por las zonas de espacio que se encuentran a su alrededor, como predice el modelo que se planteó. Por lo tanto, si hay una firma A y una firma B , estas firmas competirán por los consumidores que se encuentran entre las 2 firmas y si hay más firmas alrededor de la firma A , estas competirán por las zonas que se encuentren entre ellas y A , lo que llega a configurar las zonas hexagonales. Igualmente, es importante notar que el equilibrio se logra de forma descentralizada y sin considerar la cooperación por lo que este surge de la interacción entre las firmas.

Se aprecia también la gran importancia que tienen los costos de transporte a la hora de la decisión de los consumidores por la firma donde comprarán su producto y que la ubicación que se asume, de acuerdo a los planteamientos de Christaller y considerando que las firmas tienen su ubicación como dada, lleva a un equilibrio

simétrico para las mismas, donde se reparten el mercado en iguales. De cierta forma, el modelo daría pautas para los consumidores a la hora de evaluar sus decisiones de viaje para adquirir los bienes.

No obstante, también se debe destacar que la configuración hexagonal y el hecho de que exista un equilibrio simétrico coherente con esta estructura, depende de que los costos de producción de las firmas sean iguales. Si esta condición no se satisface, la configuración hexagonal se rompe y se llegaría a otro tipo de estructura.

Como otro aporte, se destaca que los resultados obtenidos muestran cómo puede obtenerse una distribución más eficiente de los lugares centrales (en especial de los supermercados); es decir, evaluar en qué situaciones la excesiva concentración de supermercados o firmas hace que ellas mismas se quiten mercado y las lleve a obtener beneficios menores a los que tendrían si se lo repartieran entre menos firmas. También se hace evidente que puede haber zonas desabastecidas del mercado en las que sería conveniente la entrada en competencia de más firmas para llevar a cabo una distribución más eficiente.

Se puede ver también que en los lugares centrales de la TLC de Christaller, la competencia en precios entre ellas hace que terminen ofreciendo valores muy similares para casi todos sus productos por lo que la diferencia, en términos de capturar el mercado, la da los costos de transporte y la distancia de los consumidores a los lugares centrales.

Este texto constituye una aproximación a la TLC, pero se podría analizar también la discriminación de precios que ejercen los lugares centrales, suponiendo que las firmas asumen los costos de desplazamiento o costos de transporte de los consumidores a su firma. También, sería interesante analizar a futuro la determinación simultánea y secuencial de la competencia en precios y localizaciones, lo cual sería una materia de exploración para la TLC. Otro punto de interés, aparte de los anteriormente nombrados, lo constituye estudiar cómo se traslaparían las conclusiones encontradas a la jerarquía de lugares centrales que hablaba Christaller y que no se estudian en el modelo, así como las interacciones y competencia en localizaciones, precios y los efectos de cooperación entre los lugares de diferentes niveles jerárquicos.

Asimismo, se podría revisar en un futuro la forma en la cual se puede aplicar este modelo a un espacio. Es pertinente tomar como base las conclusiones que se pueden

obtener de este texto, en especial evaluar el concepto de contigüidad y vecindad espacial y trasladarlas directamente al entorno de competencia de firmas o supermercados, teniendo en cuenta los límites de las regiones, las vías de transporte entre otras cosas, para así poder traslapar el modelo a la econometría espacial.

Como puntos adicionales a analizar en una agenda futura de investigación, se podría relajar la simetría que se asumió para las firmas en el modelo o que la competencia que se dé entre ellas sea más de competencia monopolística, algo que aunque ya ha sido abordado por otros autores como Dixit y Stiglitz (1977) o Krugman, Fujita y Mori (2002) sería bueno revisar a la luz de este modelo y sus resultados. Otra alternativa a futuro sería la modelación con base en la entrada y salida de las firmas, la cual dependería de las expectativas de entrada y salida de competidores. La idea sería que una vez tomada la decisión de entrada y salida de firmas, empezaría el proceso de fijación de precios por parte de los lugares centrales.

Hay que reconocer también que uno de los limitantes en este tipo de modelos es que en un ambiente dinámico, la unicidad se pierde y es posible llegar a multiplicidad de equilibrios, con lo cual la situación se volvería inestable.

REFERENCIAS

1. Beckmann, M. J.; McPherson, J. C. "City Size Distribution in the Central Place Hierarchy: an alternative approach", *Journal of Regional Science*, vol.10, núm. 1, pp. 243-248, 1970.
2. Berry, B.J.L. "Hierarchical Diffusion: The basis of development filtering and spread in a system of growth centers", en English, P.W. y Mayfield, R.C., (eds.): *Man, Space and Environment*, Oxford, Oxford University Press, 1972.
3. Biehl, D. Commission of the European Communities and Infrastructure Study Group, "The Contribution of Infrastructure to Regional Development". Commission of the European Communities. 1986.
4. Bogataj, M.; Bogataj, L. "Supply Chain Coordination in Spatial Games". *International Journal of Production Economics*, vol. 71, núm. 1-3, pp. 277-285, 2001.
5. Bogataj, M.; Usenik, J. "Fuzzy Approach to the Spatial Games in the Total Market Area". *International Journal of Production Economics*, vols. 93-94, núm. 1, pp 493-503, 8 de enero del 2005.
6. Boudeville, J. R. *Problems of Regional Economic Planning*. Edinburgh University Press, 1966.
7. Christaller, W. "Central Places in Southern Germany". Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1966. Traducción del texto original "*Die Zentralen Orte in Suddeutschland*".
8. Coffey, W.J.; M. Polèse, M. "Local Development: Conceptual Bases and Policy Implications". *Regional Studies*, vol. 19, núm. 2, 1984.
9. D'Aspremont, C.; Gabszewicz, J. J.; Thisse, J. F. "On Hotelling's Stability in Competition". *Econometrica*, vol. 47, núm. 5, septiembre, 1979.
10. Dixit, A.; Stiglitz, J. "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *American Economic Review*, vol. 67, núm. 3, pp. 297-308, 1977.
11. Eaton, B. C.; Lipsey, G. R. "An Economic Theory of Central Places". *The Economic Journal*, vol. 92, núm. 365, pp. 56-72, marzo de 1982.
12. Friedmann, J. "The Spatial Organization of Power in the Development of Urban Systems", *Development and Change*, vol. 4, núm. 3, pp. 12-50, 1972.
13. Fujita, M.; Krugman, P.; Mori, T. "On the Evolution of Hierarchical Urban Systems". *European Economic Review*, vol. 43, núm. 2, pp. 209-251, 1999.
14. Fujita, M.; Krugman, P. "When is the Economic monocentric: Von Thünen and Chamberlain unified". *Regional Science and Urban Economics*. vol. 25, núm. 4, pp 505-528, 1999.
15. Fujita, M.; Thisse, J. F. "Agglomeration and Market Interaction". Centre for Economic Policy Research, Discussion Paper No. 3362, 23 de febrero del 2002.
16. Garrocho, C. "La teoría de interacción espacial como síntesis de las teorías de localización de actividades comerciales y de servicios". *Economía, Sociedad y Territorio*, vol. IV, núm. 14., pp 203-251.
17. Gabszewicz, J. J.; Thisse, J.F. "Handbook of Game Theory", vol. 1, R. Aumann y S. Hart, (eds). 1992.
18. Hassinger, H. "Über Aufgaben der Stadtkunde", en *Petermanns Mitteilungen*, 56^{avo} año, 2. Gotha, 1910.
19. Hernández, A. J. "La ciudad y su análisis intraurbano: La localización de actividades económicas y el futuro de los centros" en *Contribuciones a la economía*, junio del 2006. Texto completo en URL <<http://www.eumed.net/ce/>>.
20. Hotelling, H. "Stability in Competition" *The Economic Journal*, vol. 39, núm. 153, pp. 41-57, 1929.

21. Isard, W. *Methods of Regional Analysis: an introduction to regional science*, Boston: M.I.T., 1960, Barcelona: Ariel, 1971.
22. Kilkeny, M.; Thisse, J. F. "Economics of Location. A Selective Survey". *Computers and Operations Research*, vol. 26, pp.1369-1394, 1999.
23. Krugman, P. "Increasing Returns and Economic Geography" *Journal of Political Economy*, vol. 99, núm. 3. pp. 483-499, 1991.
24. Krugman, P. *La organización espontánea de la economía*. Barcelona, Antoni Bosch, 1996.
25. Lozano, F. J. "Un primer curso de microeconomía". Universidad Nacional de Colombia, Mimeo, 2008.
26. Lösch, A. "Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft". Gustav Fischer, Jena. 1940. Traducido al inglés "The Economics of Location". Yale University Press, New Haven, 1954.
27. Maggioni, M. "The Location of High-Tech Firms and the Development of Innovative Industrial Cluster: A survey of the literature" AT2 1/2002 Progetto di Ricerca di Interesse Nazionale Working paper AT2 1, 2002.
28. Muiños J. B. "Territorio, movilidad de mano de obra y formación del mercado de trabajo. El pensamiento económico espacial hasta la II Guerra Mundial". Número extraordinario dedicado al III Coloquio Internacional de Geocrítica (Actas del Coloquio). *Revista Electrónica de Geografía y Ciencias Sociales*, Universidad de Barcelona, vol. 84, núm. 94, 1 de agosto de 2001.
29. Organización de las Naciones Unidas (ONU). "Population Division of the Department of Economic and Social Affairs of the United Nations Secretariat, *World Population Prospects: World Urbanization Prospects and the 2007 Revision (Prospectos de la Población Mundial: Prospectos de Urbanización Mundial y Revisión 2007)*", 2007, New York. Información más completa en URL <<http://esa.un.org/unup>>.
30. Perroux, F. *La economía del siglo XX*, Barcelona: Ariel, 1964.
31. Simmons, G. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw Hill International Student Edition, New York, 1963.
32. Smith, A. *Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones*. México, Fondo de Cultura Económica. 1997.
33. Sonis, M. "Central Place Theory after Christaller and Lösch & Some further explorations". Israel Prepared for the presentation at 45th Congress of the Regional Science Association, 23-27 August 2005, Vrije Universiteit Amsterdam.
34. The Economist. "Survey of Cities", publicado el 29 de julio, 1995, p. 1-18.
35. Toral Arto, M. A. "El factor espacial en la convergencia de las regiones de la UE: 1980-1996". Madrid (España). Tesis Doctoral (Economía Aplicada). Universidad Pontificia Comillas de Madrid. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Área de Economía Aplicada, 10 de octubre de 2001.
36. Venables, A. J. "Equilibrium Locations of Vertically Linked Industries", *International Economic Review*, vol. 37, núm. 2, pp. 341-359, 1996.
37. Wadley, D. *Restructuration Régionale: Analyse, Principe d'Action et Prospective*. OCDE, 1986.
38. Weber, A. *Theory of the Location of Industries*. Chicago, University of Chicago Press, 1968.
39. Weyl H. "Elementare Theorie der konvexen Polyeder." *Commentarii Mathematici Helvetici* 7, pp. 290-366, 1935. (English translation: Contributions to the Theory of Games, Princeton, 1950, p. 3-18).
40. Washington University. "Walter Christaller & Central Place Theory". 2002 (Citado el 16 de Marzo de 2009). Disponible en internet en URL <<http://faculty.washington.edu/krumme/450/christaller.html>>.

ANEXO 1

Para poder ver de forma más clara cómo cambia la idea de vecindad frente a la métrica que se utilice, se definen algunos conceptos.²³

1. Métrica:

Sea X un conjunto no-vacío. Una métrica (o distancia) es una función que asigna a cada $x, y \in X$ un número real, que se denota $d(x, y)$, con las siguientes propiedades:

$$i. \quad d(x, y) \geq 0; \quad d(x, y) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = y$$

$$ii. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$d : X \times X \quad \mapsto \quad \mathfrak{R}$$

$$(x, y) \quad \mapsto \quad d(x, y)$$

$$iii. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{Desigualdad triangular}$$

2. Bola abierta (vecindad):

Sea (X, d) un espacio métrico. La bola abierta con centro $x_o \in X$ y radio $r > 0$, denotada $B_r(x_o)$, está definida como:

$$B_r(x_o) = \left\{ x \in X \mid d(x, x_o) < r \right\}$$

Dados estos conceptos, se revisa como cambia el concepto de bola abierta con respecto a la métrica que se utilice.

Se tomará, por ejemplo, la métrica discreta que se define como:

²³ Tomado de los apuntes de clase de Análisis Matemático del profesor Francisco Javier Lozano. Ver Lozano (2008). Ver también, Simmons, G. (1963).

Ejemplo 1. Métrica discreta o grosera:

Sea X un conjunto no-vacío.

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Si se revisa la anterior definición, es posible apreciar que cumple de antemano las primeras dos condiciones de una métrica dadas anteriormente. Sin embargo, es posible ver que también satisface la tercera condición, la desigualdad triangular. Se tendría entonces dos casos:

$$x = y \begin{cases} x = y = z & \text{y la desigualdad triangular sería } 0 \leq 0 + 0 \\ x = y \neq z & \text{y la desigualdad triangular sería } 0 \leq 1 + 1 \end{cases}$$

$$x \neq y \begin{cases} x \neq y, y \neq z, z \neq x & \text{y la desigualdad triangular sería } 1 \leq 1 + 1 \\ x \neq y, x = z & \text{y la desigualdad triangular sería } 1 \leq 0 + 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, cualquier conjunto que se dote con la métrica discreta satisface la desigualdad triangular.

Sea $x_o \in X$ y X dotado con la métrica discreta. Entonces la bola abierta para esta métrica se define como:

$$B_r(x_o) = \begin{cases} X & \text{si } r > 1 \\ \{x_o\} & \text{si } r \leq 1 \end{cases}$$

Como otro ejemplo, se utilizará la distancia en valor absoluto:

Ejemplo 2.

$X = \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|$$

A continuación se revisará que esta distancia satisface las condiciones de una métrica:

- $|x - y| \geq 0$; $|x - y| = 0$ si y solo si $x = y$
- $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$
- $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Se puede observar que $|x + y| \leq |x| + |y|$ implica $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Si se usa que $|x - y| = |x + z - z - y|$, lo que puede ser expresado como:

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

En este caso, con esta métrica la bola abierta sería:

$$B_r(x_o) = \left\{ x \in \mathfrak{R} \mid |x - x_o| < r \right\} = (x_o - r, x_o + r)$$

Usando otro ejemplo, se tiene que:

Ejemplo 3.

$$X = \mathfrak{R}^2$$

$$x = (x_1, x_2) \text{ y } y = (y_1, y_2)$$

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Esta definición satisface la simetría: $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

Y el negativo del valor absoluto sería: $d(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$

Y con la desigualdad triangular:

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \text{ y } z = (z_1, z_2)$$

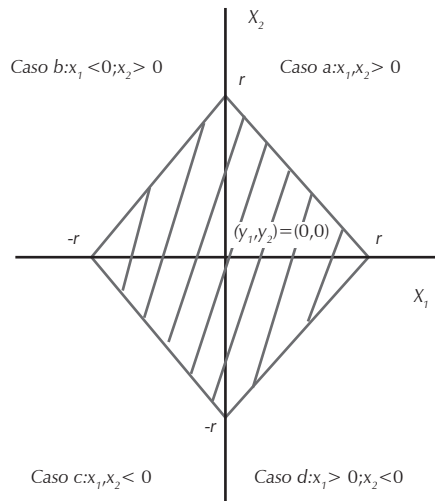
$$\begin{aligned}
 |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\
 &\leq \underbrace{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|}_{d(x, z)} + \underbrace{|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|}_{d(z, y)}
 \end{aligned}$$

En este caso y tomando como centro a $(y_1, y_2) = (0, 0)$, la bola abierta sería:

$$B_r(0) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < r \right\}$$

El gráfico de esto correspondería a:

Gráfico A.1
Bola abierta ejemplo 3



Fuente: La construcción es elaboración propia.

Como se aprecia en el Gráfico A.1, hay 4 casos los cuales se analizan a continuación:

- Caso a: $x_1, x_2 > 0$. Según la bola abierta para este ejemplo, $x_1 + x_2 < r \Rightarrow x_2 < r - x_1$ lo cual indica una ecuación con pendiente de -1 y origen en r .
- Caso b: $x_1 < 0; x_2 > 0$. En este caso la ecuación para la bola abierta sería $-x_1 + x_2 < r \Rightarrow x_2 < r - x_1$ que sería una ecuación con pendiente 1 y origen en r .
- Caso c: $x_1, x_2 < 0$. En esta situación, se tendría que $-x_1 - x_2 < r \Rightarrow x_2 > -r - x_1$, con pendiente -1 y origen en $-r$.
- Caso d: $x_1 > 0; x_2 < 0$. Para este caso, se llegaría a que $x_1 - x_2 < r \Rightarrow x_2 > -r + x_1$, con pendiente -1 y origen en $-r$.

Se aprecia en estos tres ejemplos que la bola abierta es diferente en todos los casos y que depende directamente de la métrica o medida de distancia que se utilice en cada caso. De esta forma, se puede decir que el concepto de vecindad o de contigüidad cambia frente a la métrica que se use, lo que resulta coherente con los resultados del modelo enunciado anteriormente. Esto es, que se podría modificar de alguna forma la concepción de distancia a recorrer por los consumidores o función de costos de transporte y llegar a tener diferentes visiones frente a lo que corresponde la vecindad en el modelo. De igual forma, esto muestra lo sensible que es el modelo a cambios en la medida de distancia que se utilice.