



# ENSAYOS

sobre política económica

---

## *Un modelo de manejo óptimo de las variables cafeteras*

Armando Montenegro T.  
Roberto Steiner S.

Revista ESPE, No. 11, Art. 04, Junio de 1987  
Páginas 111-133



Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista *Ensayos Sobre Política Económica* (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando nadie obtenga lucro por este concepto y además cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además colocar en su propio website una versión electrónica del documento, siempre y cuando ésta incluya la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción del documento para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro website, requerirá autorización previa del Editor de ESPE.

# Un modelo de manejo óptimo de las variables cafeteras

Armando Montenegro  
Roberto Steiner\*

## Resumen

*En este artículo se presenta un modelo de optimización intertemporal de las utilidades de un fondo de comercialización internacional de café, cuando existen cuotas en los mercados internacionales. La variable de control del problema es el precio interno del grano. Como resultado del proceso de maximización del valor presente de los ingresos netos del Fondo, se obtienen niveles óptimos de inventarios, los cuales influyen positivamente en la determinación de las cuotas. El modelo también permite realizar varios análisis de estática comparativa que describen las variaciones del precio interno y de los inventarios, originadas en cambios de las variables exógenas, tales como el precio externo, la tasa de cambio, la demanda mundial y la tasa de interés. Finalmente, se incluyen algunos ejercicios empíricos que tienden a confirmar los planteamientos del modelo.*

---

## I Introducción

---

Entre los objetivos que las autoridades persiguen al fijar las distintas variables cafeteras se pueden destacar los siguientes: i) obtener un resultado financiero para el Fondo Nacional del Café (FNC) que con-

tribuya al equilibrio fiscal y que le permita llevar a cabo los objetivos para los cuales fue creado; ii) proveer al país, mediante la exportación del grano, de un flujo ade-

---

\* Los autores agradecen los comentarios y observaciones de los asistentes a los seminarios del Departamento de Investigaciones Económicas del Banco de la República y del CEDE en la Universidad de los Andes.

cuado de divisas; iii) lograr un ingreso remunerativo para el productor, que resulte en niveles de producción que sean adecuados para suplir las necesidades de exportación, consumo interno y formación de inventarios que tiene el país.

También se le asigna al FNC el objetivo de estabilizar el ingreso cafetero, por medio del ahorro de sus ganancias, cuando existen precios externos elevados y superiores a los internos, para que pueda, en alguna medida, mantener el ingreso de los productores cuando los precios externos se deprimen.

Por otra parte, es importante destacar que en épocas de baja demanda mundial, los esquemas de comercialización vigentes descargan a los productores de la responsabilidad de mantener inventarios, los cuales se concentran en la Federación. Esta actividad es costosa y requiere de numerosos esfuerzos administrativos y financieros.

Además del control y manejo de inventarios, el FNC financia actividades tales como transferencias a los productores y asume buena parte de los costos de la comercialización internacional del café, todo lo cual obliga a mantener constantemente una brecha entre los precios externos e internos<sup>(1)</sup> (dicha brecha, medida en términos porcentuales, es, por definición, la retención efectiva<sup>(2)</sup>). Al respecto, se debe mencionar que la necesidad de financiar estas actividades fue precisamente el origen de la retención en especie, hace muchos años<sup>(3)</sup>. Con el tiempo, el manejo de la retención se ha sofisticado y ha incluido la retención en dinero.

En resumen, del análisis del manejo del FNC se hallan los siguientes rasgos característicos: i) el precio interno real sigue directamente las fluctuaciones seculares

del precio externo; ii) convertido a pesos, el precio externo siempre es superior al interno, aunque la distancia entre los dos se eleva en las bonanzas y disminuye cuando el precio externo se deprime; iii) los inventarios y la negociación de cuotas son una responsabilidad de la Federación; iv) el FNC ha realizado transferencia de recursos al productor por vías distintas a la de los precios, y, en algunas ocasiones, esas transferencias han beneficiado a otros sectores de la economía.

El propósito del presente trabajo es construir un modelo de optimización que, además de proveer de reglas de manejo para un fondo de comercialización internacional de café, permita obtener los rasgos característicos mencionados, como el resultado de un proceso de decisiones racionales<sup>(4)</sup>. Específicamente, se trata de estudiar el manejo de un ente que llamaremos Fondo, como un problema de control matemático, en el cual se utilizan los instrumentos disponibles para lograr maximizar una función objetivo<sup>(5)</sup>. La solución del pro-

(1) Al respecto, H. Uribe (1984) afirmaba que "... realmente el productor colombiano no ha recibido nunca una suma igual o equivalente al precio externo del café si se compara libra a libra, él realmente lo que ha recibido es un ingreso menor, pero que lo libera del problema de retener café en su propia finca, o de tener que apelar a sistemas de crédito como descuentos de bonos de prenda para que en esa forma financie sus operaciones corrientes". (pág. 4).

(2) Se hace abstracción de costos de comercialización y se supone que la llamada ecuación cafetera está siempre ajustada.

(3) Véase Fedesarrollo (1981) Economía Cafetera, Capítulo X.

(4) Este modelo se basa en Armando Montenegro (1984) "The Optimal Price of Coffee, and the Optimal Level of Inventories of Coffee in Colombia", East Setauket, October.

(5) En la medida en que el problema en referencia se plantea en condiciones altamente ideales y con diversos supuestos simplificadores, llamamos la atención sobre el hecho de que en ningún momento pretendemos estar haciendo referencia específica al Fondo Nacional del Café, tal y como opera en Colombia.

blema también indica el manejo óptimo de las variables cafeteras ante oscilaciones de los precios externos, la tasa de interés y el mercado de cuotas, entre otros.

En el modelo, el Fondo es una entidad que cumple con las siguientes funciones: i) compra café a los productores, con la doble finalidad de exportar y almacenar; ii) negocia una cuota de exportación que se le asigna en un convenio internacional, cuota que depende del nivel de inventarios; iii) determina el nivel de precio interno que ha de pagar a los productores; iv) toma como exógenos los precios externos.

La función objetivo que el Fondo busca maximizar es su valor neto, o sea el valor presente de sus ingresos netos. Implícito en el análisis está el hecho de que el Fondo transfiere estas ganancias, bien sea a los productores, por medio de mecanismos diferentes al precio interno, o al resto de la sociedad.

Aparte del Fondo, existen otros tres agentes: i) productores; ii) exportadores privados; iii) arbitradores espaciales, o sea quienes venden café al exterior en forma directa, aprovechando la diferencia entre los precios externos e internos.

Para construir un modelo técnicamente manejable, se hace necesario, sin embargo, suponer que los exportadores privados y la Federación se presentan como un solo agente. Este supuesto se justifica por el cobro de la retención, o sea la diferencia entre el precio externo y el interno, que permite el traslado del margen del exportador al Fondo. De esta forma, se puede suponer que es indiferente quien realiza las exportaciones, lo cual no es, por lo tanto, demasiado irreal.

El análisis se realiza en varias etapas. En efecto, en la siguiente sección se exploran

algunos elementos básicos de las decisiones microeconómicas de la economía cafetera. En segundo lugar, se plantea la ecuación de fijación de cuotas, que se utiliza en este estudio. En tercer lugar, se presenta el problema de maximización del valor presente del Fondo junto con su solución y análisis. En cuarto término, se muestran algunos resultados empíricos referentes al manejo del precio interno en Colombia. Finalmente, se plantean algunas conclusiones.

---

## **II Las decisiones de producir, vender al Fondo y enviar café al exterior**

---

En este modelo, el Fondo fija el precio interno y compra la gran mayoría de la cosecha doméstica. El otro grupo comprador es el de los arbitradores, quienes venden el café directamente al exterior, por fuera del sistema de controles y de cuotas. La producción local, que se divide entre las ventas al Fondo y al exterior, utiliza insumos variables, de acuerdo con una función de producción en la cual todos los insumos se agrupan en uno solo, cuyo precio se fija exógenamente.

Dado que el precio interno es inferior al externo, existe en la economía una constante tendencia a vender directamente el café en el exterior. Sin embargo, esa labor de arbitraje halla el obstáculo de costos crecientes, debido a los controles, la distancia de las zonas productoras a los puertos y la dificultad incremental de conseguir clientes en el mercado mundial. Dichos costos se presentan en nuestro modelo por una función que depende del volumen arbitrado, con sus dos primeras derivadas positivas.

Uno de los elementos centrales en este modelo, el cual explica que el precio interno siga en forma paralela al precio externo, manteniéndose una brecha entre ellos, es la continua posibilidad de arbitraje al exterior, la cual se observa con gran nitidez en épocas de bonanza.

En consecuencia, conjuntamente, el problema de producir y distribuir la cosecha es el siguiente:

$$\text{MAX } \pi = P_d X + (P_c \cdot e - Z(Y)) Y - vL \quad (1)$$

(L, X, Y)

Sujeto a:  $X + Y = f(L) \quad (2)$

donde:

- X = café vendido al Fondo
- Y = café arbitrado directamente al exterior
- P<sub>d</sub> = precio interno del café en pesos
- P<sub>c</sub> = precio internacional en dólares
- e = tasa de cambio, pesos por dólar
- f = producción de café
- L = insumos variables
- f(L) = función de producción f' > 0; f'' < 0
- v = precio unitario de los insumos, considerado exógeno
- Z = costos unitarios de arbitrar hacia el exterior Z' > 0; Z'' > 0

Las condiciones de primer orden de este problema son las siguientes:

$$P_d = q \quad (3.1)$$

$$P_d f' = v \quad (3.2)$$

$$P_c e - P_d = Z' Y + Z \quad (3.3)$$

Aquí q es un multiplicador de Lagrange, el precio sombra de la producción adicional de café.

Las condiciones (3.1 - 3.3) determinan completamente el comportamiento de las ventas y la producción de café:

i) La primera condición plantea que la valorización marginal del café, su precio sombra, se determina de acuerdo con el nivel del precio interno.

ii) La segunda condición indica que se utilizan nuevos insumos para producir café hasta el punto donde el valor del producto marginal es igual al costo de los mismos.

iii) La última condición fija la regla de optimización para el arbitraje. Este tiene lugar hasta el punto en el cual la ganancia adicional de arbitrar (dada por el margen de arbitraje, (P<sub>ce</sub> - P<sub>d</sub>)) es igual al costo marginal de arbitrar el volumen Y, o sea, Z' Y + Z.

De las condiciones anteriores, se derivan las siguientes funciones:

Oferta de café:

$$f = f(P_d / v) \quad f' > 0 \quad (4.1)$$

Arbitraje de café:

$$Y = Y(P_{ce} - P_d) \quad Y' > 0 \quad (4.2)$$

Ventas al Fondo:

$$X = f - Y$$

$$= X(P_d / v, P_{ce} - P_d)$$

donde:  $X_1 > 0; X_2 < 0 \quad (4.3)$

Estas funciones son muy simples: i) la producción crece con el precio interno y decrece con el aumento en el valor de los insumos; ii) el arbitraje hacia el exterior varía en relación directa con la diferencia entre el precio externo y el precio interno; iii) las ventas al Fondo suben con la producción y descienden con el arbitraje al exterior. Por lo tanto, se elevan cuando sube el precio interno; bajan cuando los insumos son más caros y cuando crece el precio externo; la devaluación reduce las compras realizadas por el Fondo porque se aumenta el margen del arbitraje.

Por conveniencia, hemos supuesto adicionalmente que la elasticidad de las compras del Fondo al precio interno es constante en el rango relevante. Este supuesto simplifica enormemente el álgebra y la presentación de los resultados. Su relajación, sin embargo, no altera los resultados finales. Adicionalmente, con respecto al arbitraje de café al exterior, se debe anotar que de (3.3) y de (4.3) se deduce que existe un nivel mínimo de margen de arbitraje que permite que las ventas al exterior sean positivas. Por debajo de ese nivel no habrá arbitraje. En el resto del trabajo suponemos que nos hallamos dentro del rango de arbitraje positivo.

### III La fijación de cuotas

De acuerdo con nuestros supuestos, se plantea que la cuota de café de Colombia, dentro del Pacto Mundial, está dada por una función del siguiente tipo <sup>(6)</sup>:

$$Q = q(k, S/S^*)W \quad (5)$$

donde:

Q	=	cuota de Colombia
W	=	consumo mundial del grano
q	=	porcentaje del consumo mundial que se otorga como cuota a Colombia
k	=	parámetro que representa la historia cafetera y el poder negociador del país
S	=	inventarios de café de Colombia en el momento de la negociación
S*	=	inventarios mundiales
S/S*	=	porcentaje de inventarios colombianos dentro de los inventarios mundiales
q'	=	derivada con respecto a S/S*

Se supone que  $q' > 0$  y  $q'' < 0$ ; además, es conveniente y razonable suponer que el aporte marginal de los inventarios a la cuota es muy grande cuando estos son muy bajos, o sea que:

$$\lim q' = \infty$$

$$S \rightarrow 0$$

Por otra parte, planteamos que  $q(k, 0)W = 0$ . Es decir, sin inventarios no puede haber cuota.

Sobre estos puntos, es necesario comentar lo siguiente:

i) Se supone que la historia cafetera influye exógenamente sobre el porcentaje del consumo mundial que se otorga como cuota al país.

ii) Los inventarios influyen positivamente sobre la cuota del país: cuanto más altos sean con respecto a los niveles de los inventarios mundiales, el país logra una mayor cuota, como porcentaje del consumo mundial. Esto debido a dos razones. En primer término, los consumidores premian con más cuota a los países con mayores inventarios, como un seguro contra las fluctuaciones de precios originadas por variaciones imprevistas en los volúmenes de las cosechas. En segundo lugar, otros productores tienden a aceptar mayores cuotas a causa de los mayores inventarios de sus competidores porque esos inventarios se convierten en amenazas de ventas por fuera del pacto, hecho que tiende a

(6) Las técnicas y fórmulas para fijar cuotas son sin duda más complejas que las que se incluyen en este trabajo. Sin embargo, los inventarios y la tradición han sido señalados con frecuencia como altamente importantes en la determinación de las cuotas. Véase, por ejemplo, FEDECAFE (1983).

elevant los diferenciales de precios, debilitando el esquema.

Esta fórmula de fijación de la cuota cafetera del país provee una justificación poderosa para mantener y manejar inventarios en una forma que eleve los ingresos y que maximice los beneficios del Fondo. Sin embargo, como se explica más adelante, los inventarios tienen costos elevados que contrarrestan sus beneficios marginales en términos de mayores cuotas. Las ganancias y los costos obligan a buscar un nivel óptimo de inventarios, lo cual se obtiene de la solución del modelo de maximización que se propone más adelante (7).

## IV La optimización por parte del Fondo

El objetivo del Fondo consiste en maximizar el valor presente de la diferencia entre los ingresos, originados en sus exportaciones de café, y sus egresos, causados por la compra de la cosecha y por el mantenimiento de inventarios.

La principal restricción que enfrenta el Fondo es que en él se concentra la acumulación de inventarios, que no es otra cosa que la diferencia entre el volumen de café que produce el país y el que se vende en el exterior, a saber, las exportaciones del Fondo y el café que se arbitra directamente(8).

La optimización del Fondo es un problema intertemporal. Maximiza sus ganancias en el tiempo sujeto a una restricción dinámica. Más concretamente, el problema se plantea así:

$$\text{MAX} \int_0^{\infty} e^{-rt} (eP_cQ - I(s) - P_dX) dt \quad (6)$$

Sujeto a:

$$\dot{S} = X - Q = f(P_d/v) - Y(P_c e - P_d) - Q \quad (7)$$

$$S(0) = S_0 \quad (8)$$

La tasa de descuento está dada por  $r$ ;  $t$  es el tiempo; también, en adelante,  $\dot{M} = dM/dt$ .

El término entre paréntesis en la ecuación (6) mide las ganancias del Fondo en cada momento del tiempo. A saber, la diferencia entre lo que recibe por ventas al exterior,  $eP_cQ$ , y lo que asume como gastos: el mantenimiento de inventarios,  $I(S)$ , y el valor de las compras que hace a productores,  $P_dX$ .

Suponemos que la función  $I(S)$  tiene primera y segunda derivadas positivas y que los costos marginales de acumular inventarios son muy bajos cuando las existencias son pequeñas. Es decir,

$$\lim I' = 0$$

$$S \rightarrow 0$$

Por otra parte, la ecuación (7) describe el cambio en los inventarios; además, la condición (8) muestra la situación inicial en el volumen de inventarios. En este problema, la variable de control es  $P_d$  y la variable de estado es  $S$ . Las variables  $r$ ,  $P_c$ ,  $e$ ,  $S^*$  y  $W$  son exógenas.

(7) Sin pérdida alguna de generalidad, y con el propósito de hacer más sencilla la manipulación algebraica que más adelante se realiza, supondremos que  $k = 0$  y  $S^* = 1$ .

(8) Donde, sin pérdida alguna de generalidad, se hace el supuesto simplificador de que el consumo interno es igual a cero.

El Halmitoniano asociado al problema (6) — (8) es el siguiente:

$$H = eP_C \cdot q(S/S^*)W - I(S) - P_d X + \lambda(X - q(S/S^*)W) \quad (9)$$

Aquí  $\lambda$  es la variable de coestado, el precio sombra de una unidad adicional de café almacenada por el Fondo.

La primera condición de optimalidad en el problema indica el manejo del precio interno en cada instante:

$$X + P_d \cdot dX/dP_d = \lambda \cdot dX/dP_d \quad (10)$$

Esta condición plantea que el precio interno se debe elevar hasta el punto en el cual los gastos adicionales por ese concepto,  $X + P_d \cdot dX/dP_d$ , sean iguales al mayor valor generado por los inventarios, valorados a su precio sombra.

Utilizando  $\epsilon$ , la elasticidad de  $X$  al precio interno, (10) se puede escribir así:

$$P_d = (\epsilon / (1 + \epsilon)) \lambda \quad (11)$$

Esta expresión tiene un significado muy interesante: el precio interno debe ser sólo una fracción del precio sombra de los inventarios. Esta fracción, a su vez, depende de la elasticidad precio de las compras del Fondo. Esta expresión es semejante a la condición de optimización de los mercados de monopsonio en los textos microeconómicos. El productor debe recibir un precio interno que es inferior a la valoración marginal de los inventarios de café para el Fondo. Además, cuanto más grande sea  $\epsilon$ , menor es la diferencia entre  $P_d$  y  $\lambda$  (9).

Vale la pena comentar sobre el hecho de que el precio interno es menor que el precio sombra para el Fondo. Recordemos que tanto la oferta de café como las ventas al

Fondo resultan de un proceso en el cual el productor maximiza sus ganancias, tomando  $P_d$  como dado. Lo que sucede es que el precio sombra al cual el Fondo valora sus inventarios (10), es una variable que no es pertinente al productor, pues sólo el Fondo incurre en los costos y los ingresos generados por los inventarios, hechos que se reflejan en el precio sombra, tal como se observa más adelante.

En efecto, los determinantes del precio sombra se aprecian en la ecuación diferencial que explica la evolución de la variable de coestado:

$$\dot{\lambda} = d\lambda/dt = I_S + r\lambda - Q_S(eP_C - \lambda) \quad (12)$$

( $I_S$  y  $Q_S$  son las derivadas de  $I$  y de  $Q$  con respecto a  $S$ ; por ejemplo,  $Q_S = q_S W$ ).

Esta ecuación nos dice que el cambio marginal en el valor de los inventarios debe ser igual al costo marginal neto de tener una unidad adicional de los mismos. Los costos brutos incluyen el costo de almacenamiento ( $I_S$ ) y el costo de oportunidad de mantener inventarios a lo largo del tiempo, dado por  $r\lambda$ . A esos costos se resta la ganancia marginal obtenida por acumular un saco adicional: la mayor cuota por acumular un saco adicional,  $Q_S$ , que se vende a  $eP_C$ , y se valora a  $\lambda$ . Por lo tanto, la ganancia es  $Q_S (eP_C - \lambda)$ .

(9) Así, por ejemplo, si los costos de arbitraje son muy bajos, las compras del Fondo son muy sensibles al precio interno. Por lo tanto, para un manejo óptimo del precio interno, éste estará muy cercano a la valoración de los inventarios del Fondo.

(10) Inventarios que, "per se", elevan las posibilidades de exportación que se realiza al precio internacional.

De la ecuación diferencial (12) es posible resolver el valor del precio sombra de los inventarios de café, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$e^{-d}\lambda = \int_0^{\infty} e^{-d} (eP_c Q_s - I(s)) dt \quad (13)$$

donde, 
$$d = \int_0^{\infty} (r + Q_s) dt$$

La ecuación (13) indica que el tamaño de  $\lambda$  está determinado por el valor presente de la suma de los ingresos marginales netos, originados en la acumulación de inventarios. Dichos ingresos netos están dados por la diferencia entre el valor de las mayores ventas causadas por acumular inventarios y los costos de los mismos.

Esta condición tiene también otra implicación muy interesante. Al estar el precio sombra determinado por variables futuras, el precio interno, vía ecuación (11), también lo está. Por lo tanto, ninguno de estos precios cambia con eventos contemporáneos, de carácter temporal. Esto implica que el precio interno se cambia suavemente y no responde a eventos transitorios. Es una variable que toma en cuenta todo el futuro de la operación comercial del Fondo del Café.

Antes de continuar es conveniente expresar la ecuación diferencial (12) en términos del precio interno  $P_d$ . Ello se logra reemplazando (11) en (12), de lo cual se obtiene:

$$\dot{P}_d = P_d (r + Q_s) + (\epsilon / (1 + \epsilon)) (I_s - Q_s eP_c) \quad (14)$$

Con esta ecuación (14) y con la expresión (7) se realiza el análisis de largo plazo del modelo.

### A. Equilibrio de largo plazo: Diagrama de fase y estabilidad

Se estudian aquí las condiciones de reposo del modelo descrito por las ecuaciones (7) y (14), las cuales se repiten por conveniencia explicativa.

$$\dot{S} = f(P_d / v) - Y(eP_c - P_d) - Q \quad (7)$$

$$\dot{P}_d = P_d (r + Q_s) + (\epsilon / (1 + \epsilon)) (I_s - Q_s eP_c) \quad (14)$$

(recuérdese que  $Q_s = q_s W$ )

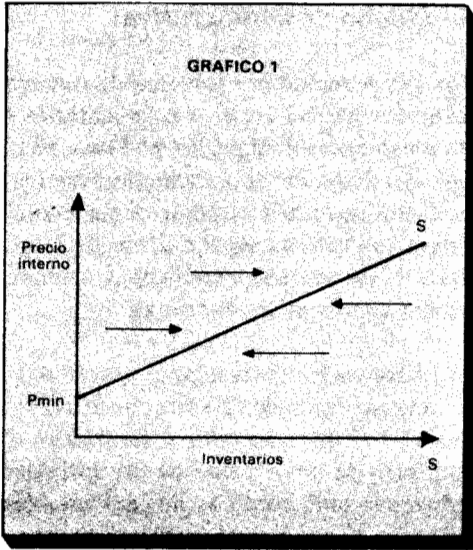
Las combinaciones de puntos que describen el equilibrio de la ecuación (7) conforman la curva que denominamos SS. Por su parte, las combinaciones de puntos que hacen que  $\dot{P}_d = 0$ , forman la curva PP.

En cuanto a la curva SS, o sea, las combinaciones de precios y de inventarios que producen  $\dot{S} = 0$ , se halla que tiene pendiente positiva. La razón es muy clara: cuando sube el precio interno, se eleva la producción y con ella suben los inventarios, en forma marginal; para reducir el exceso de inventarios, aumentándose las ventas en el exterior, es necesaria una mayor cuota, la cual se consigue con un mayor saldo acumulado de café (11).

Se debe anotar que la curva SS corta el eje del precio doméstico en un nivel  $P_d = P_{min}$ , para el cual toda la producción se dirige al arbitraje al exterior y el Fondo no exporta nada. La curva SS se describe en el Gráfico 1(12).

(11) La pendiente de SS está dada por:  
 $dP_d / dS = q_s W / (r/v + Y)$ .

(12) Se puede probar que  $P_{min} = P(v, eP_c)$ , siendo  $P_{min}$  función positiva de los dos argumentos. Además, la estructura de la función  $P(\cdot)$  está determinada por la función de producción y por la estructura de costos de arbitraje al exterior.



Para precios por encima de la línea SS, la producción adicional induce más ventas al Fondo y causa un menor arbitraje, luego los inventarios crecen; por ello, las flechas tienden al equilibrio. Un razonamiento semejante se realiza para mostrar flechas por debajo de la curva.

Por otra parte, en cuanto a la curva PP, es necesario realizar los siguientes comentarios:

- i) En equilibrio, la ecuación diferencial (14) indica las combinaciones de P y de S que no dan lugar a cambios en el precio interno del grano.
- ii) A partir del equilibrio de esa ecuación, y dadas las condiciones de las distintas funciones, se puede probar que:

$$P_d = (\epsilon / (1 + \epsilon))eP_c, \text{ cuando } S = 0, \quad (15)$$

Es decir, cuando no existen inventarios de café, el precio interno que equilibra (14) es

sólo una fracción del precio externo<sup>(13)</sup>. Luego se verá que este es el nivel máximo que puede tener el precio interno en este modelo.

iii) Por otra parte, cuando  $P_d = 0$ , existe un nivel de inventarios mayor o igual a cero, S, que hace que la ecuación (14) esté en equilibrio.

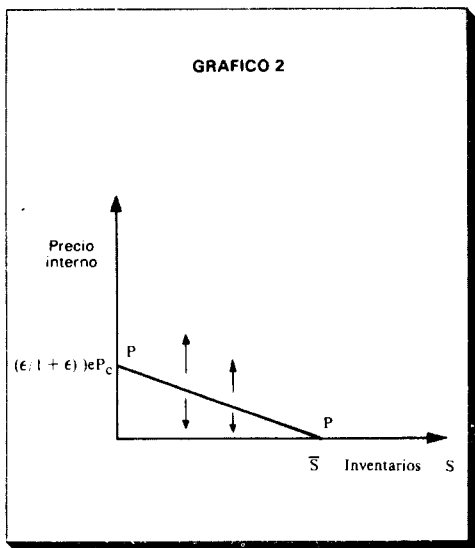
iv) La pendiente de la curva PP está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{Wq_{SS} ((\epsilon / (1 + \epsilon)) P_c e - P_d)}{r + q_s W} - \frac{(\epsilon / (1 + \epsilon)) I_{SS}}{r + q_s W} \quad (16)$$

El denominador de (16) es claramente positivo. Por otra parte, el numerador es negativo si la expresión  $((\epsilon / (1 + \epsilon))eP_c - P_d)$  es positiva. Esto se cumple sin ninguna dificultad para valores suficientemente pequeños de  $P_d$ ; por ejemplo, en la vecindad de  $\bar{S}$ . Además, ya vimos en ii) que cuando S tiende a cero, la curva (14) pasa por  $\bar{P}_d = (\epsilon / (1 + \epsilon))P_{ce}$ ; entonces, ya que el numerador de (16) no puede cambiar de signo entre  $P_d = 0$  y  $P_d = \bar{P}_d$ , la curva tiene, sin ninguna ambigüedad, pendiente negativa en ese rango.

v) La forma de PP, se describe en el Gráfico 2; allí también se indican las flechas que describen la dirección del ajuste en puntos arriba o abajo de la curva.

(13) Para demostrar (15), es suficiente tomar la ecuación (14), igualar a 0, dividir por  $Q_s$  y tomar límites cuando S tiende a cero.



El modelo en equilibrio está dado por la intersección de las curvas SS y PP, hecho que se describe en el Gráfico 3. La solución del modelo muestra que existe inestabilidad del tipo de "Saddle Path", tal como se presenta matemáticamente en el Apéndice 1.

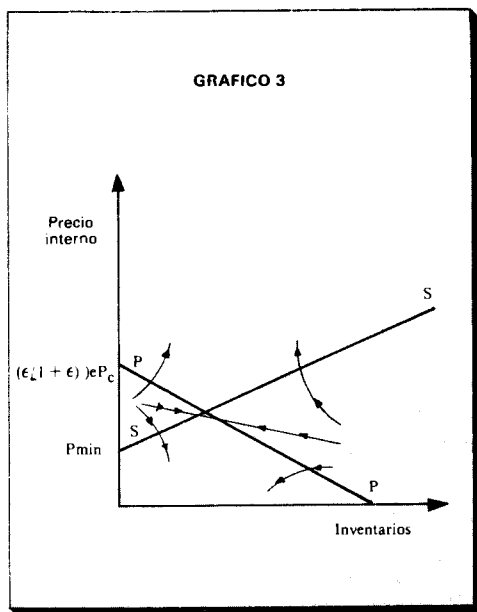
Algunas propiedades de largo plazo de este modelo son las siguientes:

- i) El precio externo es siempre superior al interno; es decir, la retención es siempre positiva.
- ii) El precio interno, a su vez, es menor al precio sombra de café.
- iii) Siempre, por lo tanto, existe algún nivel de arbitraje hacia el exterior.
- iv) El precio sombra de café es igual al precio externo cuando no hay inventarios. Esto, por cuanto no existen los costos derivados de acumular café.
- v) La existencia de una solución está garantizada por la condición  $P_{min} \leq (\epsilon / (1 + \epsilon)) eP_c$

### B. Dinámica comparativa

Una vez reducido el problema de manejo del precio interno y el nivel de inventarios a dos ecuaciones diferenciales, podemos efectuar ejercicios de dinámica comparativa. Es decir, podemos estudiar cómo evolucionan los valores de equilibrio de largo plazo de las variables endógenas, cuando cambia alguna de las exógenas.

Con base en las derivaciones que se consiguen en el Apéndice 2, se ha construido el cuadro 1. Allí se observa el cambio en el equilibrio de largo plazo de las variables endógenas ante cambios de las variables exógenas. Por otra parte, también se incluyen en las páginas siguientes algunos ejercicios gráficos con diagramas de fase. Con el fin de no hacer el trabajo demasiado extenso, hemos hecho escaso uso de este análisis gráfico. Sin embargo, debido a su sencillez, todos los ejercicios pueden fácilmente ilustrarse con ejercicios de esta naturaleza.



### 1. Efectos de cambios en el precio externo

Las implicaciones de un aumento permanente en el precio externo se observan tanto en el Gráfico 4, como en la primera línea del Cuadro 1. Gráficamente, tenemos

que el aumento en el precio externo no nos lleva del equilibrio inicial en I al equilibrio final en F. El precio interno necesariamente aumenta, y el resultado sobre el nivel de inventarios es ambiguo, aunque se ha optado por graficar el caso en que estos se elevan.

CUADRO 1

#### Dinámica comparativa

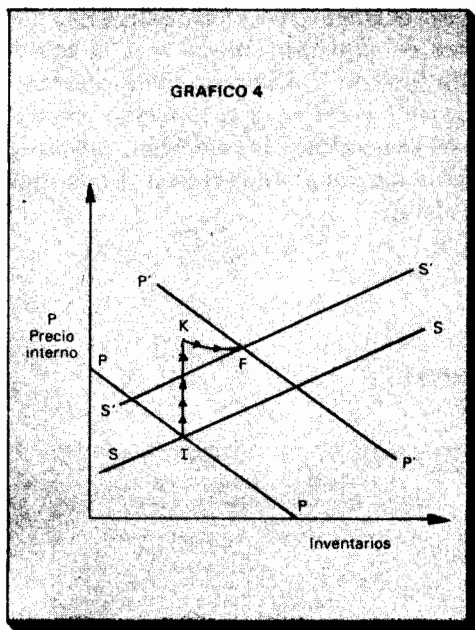
Efecto sobre Cambios en:	Precio interno	Inventarios	Producción	Cuota	Margen = Retención Efectiva	Arbitraje Especial	Ventas al Fondo
Precio externo	$0 < + < I$	?	+	?	+	+	?
Demanda mundial	+	?	+	?	-	-	+
Costo de los Insumos	+	-	-	-	-	-	?
Tasa de Interés	-	-	-	-	+	+	-

La trayectoria hacia el equilibrio implica el paso por el punto K, superior a F, existiendo lo que se denomina "overshooting". Intuitivamente, sucede lo siguiente: al aumentar el precio externo, pasamos de I a K, lo que implica que el precio interno aumenta por encima de su valor final. Inicialmente, no hay ningún efecto sobre el nivel de inventarios, pues éstos sólo cambian en el tiempo; no pueden ser alterados en un instante. Ahora bien, la trayectoria de K a F describe una situación en que el precio interno disminuye constantemente y el nivel de inventarios crece con la mayor producción y el menor arbitraje.

Vale la pena un comentario sobre la ambigüedad en los cambios de inventarios. Del Cuadro 1 se deduce que la respuesta óptima a un aumento en el precio externo consiste

en elevar el precio interno, pero en menor proporción. Es decir, es óptimo aumentar la retención efectiva, que en nuestro modelo no es otra cosa que la diferencia entre el precio externo convertido a pesos y el precio interno. El alza en el precio interno estimula la producción, y el aumento en la retención efectiva representa un incentivo a arbitrar espacialmente el café. Por esa razón, tanto el café que es vendido al Fondo como el nivel de inventarios pueden aumentar o disminuir.

Resulta interesante destacar el resultado de que la respuesta óptima del precio interno ante aumentos en el precio externo es su incremento pero en menor proporción. Intuitivamente, este resultado se explica en el hecho de que para el Fondo es conveniente apropiarse del mayor nivel de



retención posible. El límite a ello lo representa el fenómeno de que un margen muy elevado entre el precio externo y el interno puede dejar al Fondo sin café, pues los arbitradores prefieren vender el producto directamente al exterior. Al aumentar el precio externo, resulta óptimo incrementar el margen, porque las ganancias de tal estrategia más que compensan las pérdidas. Dichas pérdidas tienen que ver con disminuciones en las compras del Fondo y en el nivel de inventarios, lo que implica el acceso a una menor cuota en el futuro.

Sin duda la respuesta marginal, inferior a uno, del precio interno ante cambios del externo, es otra razón que explica la suavización que se presenta en el manejo del precio interno ante los cambios en el externo.

No quisiéramos terminar esta discusión sin hacer explícito el hecho de que nos hemos referido a aumentos en el precio externo convertido a pesos. Es claro que ello se

puede lograr con aumentos en el precio externo en dólares o en la tasa de cambio (14). En nuestro modelo simplificado, a priori, no se pueden diferenciar los efectos entre cambiar una u otra variable.

## 2. Efectos de aumentos en la demanda mundial

La segunda línea del Cuadro I indica que la respuesta óptima a aumentos en la demanda mundial consiste en incrementar el precio interno, de manera tal que aumente la producción y se eleven las ventas al Fondo. El resultado sobre los inventarios es ambiguo, porque si bien aumentan las compras del Fondo, también es cierto que crecen sus ventas en el exterior.

Como en el caso de aumentos en el precio externo, el resultado sobre la cuota de exportación es ambiguo. Este es un resultado lógico de la ambigüedad en el nivel de inventarios.

Puesto que en el presente ejercicio el precio externo no ha aumentado, el incremento en el precio interno implica una disminución en el margen o retención efectiva. Es decir, un alza en la demanda mundial trae consigo la decisión de transferirle al productor una mayor proporción del precio externo. Evidentemente, esto implica que disminuye el incentivo a arbitrar espacialmente el café.

Es claro, entonces, que un aumento en el precio externo no es equivalente a un aumento en la demanda mundial. En ambos casos aumentan el precio interno y la producción, y se tiene un resultado ambiguo sobre el nivel de inventarios.

(14) Por tratarse de un modelo que está en términos reales, un aumento en la tasa de cambio se refiere a elevar el nivel real de dicha variable.

taños. Sin embargo, mientras un alza en el precio externo conlleva a un aumento en la retención efectiva, incrementos en la demanda mundial hacen que sea óptimo disminuirla.

### 3. Efecto de aumento en el costo de los insumos

La variable  $v$  representa el nivel de salarios, en la medida en que el modelo de optimización del productor incluye como único insumo al trabajo. Sin embargo, conceptualmente podemos interpretar  $v$  de una forma más amplia, incluyendo los costos de todos los insumos utilizados para producir café.

Del Cuadro 1 se desprende que el aumento en el precio de los insumos trae consigo una elevación en el precio interno. A pesar de ello, la producción y el nivel de inventarios caen. Esto sugiere que para el Fondo es conveniente aumentar el precio interno de manera tal que no sea exagerada la caída en la producción, pero que de ninguna manera es conveniente elevar el precio al mismo ritmo en que aumenta el costo de los insumos.

Puesto que el precio externo no ha cambiado, el aumento en el precio interno implica una caída en el margen. Es decir, resulta óptimo disminuir la retención efectiva cuando aumenta el costo de los insumos, resultado que es intuitivamente lógico, pues, además de compensar así al productor por los mayores gastos, se evita una mayor reducción en la producción y en las exportaciones.

La disminución en la retención desestimula el arbitraje espacial. Este hecho, combinado con el descenso en la produc-

ción hace que el resultado sobre el volumen de café adquirido por el Fondo sea ambiguo.

### 4. Efectos de aumentos en la tasa de interés

En un contexto intertemporal, un alza en la tasa de interés implica que el agente maximizador altera sus preferencias en favor del presente y en contra del futuro. Es decir, el agente se vuelve "más impaciente". Esto en razón a que un aumento en la tasa de interés disminuye el valor presente de cualquier flujo que se genere en el futuro.

Del cuadro 1 se desprende que un aumento en la tasa de interés determina que sea óptimo tomar medidas que aumenten las utilidades en el presente. Por esa razón, lo adecuado es disminuir el precio interno, pues la caída en la producción y en los inventarios que ello trae consigo disminuye la cuota, pero eso es algo que a un maximizador "impaciente" no le debe importar demasiado.

La caída en el precio interno aumenta la retención efectiva, lo cual representa un estímulo al arbitraje espacial. De nuevo, aunque el mayor arbitraje disminuye las compras y los inventarios en poder del Fondo, a éste, como ya vimos, poco le importa tal situación, si la tasa de interés es muy elevada.

Evidentemente, no nos hemos preocupado por explicar en qué consiste el cambio en la tasa de interés. Se trata simplemente de una variable real de carácter exógeno que mide la preferencia intertemporal del Fondo Nacional del Café.

## V Algunos ejercicios empíricos

En el Cuadro 1 hemos resumido los resultados de los ejercicios de dinámica comparativa. De allí se desprende la respuesta óptima de las variables endógenas a cambios en las variables exógenas, dada la función objetivo que el Fondo maximiza.

En la realidad, no hay ninguna evidencia de que la política cafetera se fije con el propósito de maximizar el valor presente neto del Fondo. Sin embargo, resulta interesante comparar los resultados observados en la práctica con aquellos que son predichos por el modelo. Infortunadamente, no es posible construir series confiables para la mayoría de las variables a que hace referencia el cuadro 1.

A pesar de ello, el principal ejercicio de dinámica comparativa que hemos realizado —a saber, cambios en el precio externo— sí puede ser replicado empíricamente. Específicamente, es posible analizar econométricamente la relación que existe entre el precio interno y el externo y entre el margen (o retención efectiva) y el precio externo.

Con tal propósito, hemos construido las siguientes variables:

**PIN:** Precio interno real, por carga de café pergamino, utilizando como deflactor el IPC.

**PRE:** Precio externo (convertido a pesos) real, por libra de café verde, utilizando el IPC de Colombia como deflactor.

**MAR:** Relación entre el precio externo (convertido a pesos) y el precio interno, ambos en pesos por libra de café verde.

Las cifras referentes a las anteriores variables aparecen en el cuadro 2. Como nota destacada observamos que la variable MAR es siempre superior a la unidad, lo que corrobora el resultado de nuestro modelo en el sentido de que el precio externo (convertido a pesos) es siempre superior al precio interno.

Con las anteriores variables se elaboraron dos regresiones, cuyos resultados son los siguientes (donde la variable entre paréntesis es el estadístico t);

$$i) \quad LPIN = 6.823 + 0.534 LPRE \\ (6.07)$$

$$R^2 \text{ ajustado} = .716 \\ DW = 1.63$$

$$ii) \quad LMAR = -1.448 + 0.464 LPRE \\ (5.28)$$

$$R^2 \text{ ajustado} = .703 \\ DW = 1.64$$

Por tratarse de regresiones logarítmicas los coeficientes de las variables independientes miden la elasticidad de la variable endógena con respecto a la variable exógena.

La primera regresión indica que la elasticidad del precio interno real al precio externo real es de 0.534. Es decir, no sólo el precio interno es menor al externo (recuérdese que el margen es siempre superior a 1), sino que además cambios en el precio externo implican cambios menos que proporcionales en el precio interno. Por ejemplo, un aumento de 10% en el precio externo (convertido a pesos) trae consigo un alza de 5% en el precio interno.

El anterior resultado implica que aumentos en el precio externo, al promover cambios menos que proporcionales en el interno, trae consigo aumentos en el margen. Este

CUADRO 2

	Precio Externo (US\$/lb)	Tasa de Cambio (\$/US\$)	Precio Interno (\$/Carga)	Indice de Precios al Consumidor (1980=100)	PIN (1)	PRE (2)	MAR (3)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1957 .....	0.62	3.80	484	4.0	12.000	58.90	1.05
1958 .....	0.52	6.40	467	4.6	10.152	72.35	1.53
1959 .....	0.45	6.40	388	4.9	7.918	58.78	1.59
1960 .....	0.43	6.40	429	5.1	8.412	53.96	1.38
1961 .....	0.40	6.70	471	5.5	8.564	48.73	1.22
1962 .....	0.38	6.90	478	5.7	8.386	46.00	1.18
1963 .....	0.37	9.00	556	7.5	7.413	44.40	1.29
1964 .....	0.49	9.00	718	8.8	8.159	50.11	1.32
1965 .....	0.47	10.48	717	9.1	7.879	54.13	1.48
1966 .....	0.44	13.50	757	10.9	6.945	54.50	1.69
1967 .....	0.41	14.51	759	11.8	6.432	50.42	1.69
1968 .....	0.41	16.29	889	12.5	7.112	53.43	1.61
1969 .....	0.42	17.32	982	13.8	7.116	52.71	1.59
1970 .....	0.54	18.44	1.304	14.7	8.871	67.74	1.64
1971 .....	0.47	19.93	1.246	16.1	7.739	58.18	1.62
1972 .....	0.52	21.87	1.500	18.2	8.242	62.49	1.63
1973 .....	0.64	23.64	1.937	22.0	8.805	68.77	1.68
1974 .....	0.68	26.06	2.207	27.4	8.055	64.67	1.73
1975 .....	0.67	30.93	2.730	33.6	8.125	61.68	1.63
1976 .....	1.45	34.69	5.532	40.4	13.693	124.51	1.95
1977 .....	2.37	36.78	7.179	53.8	13.344	162.02	2.61
1978 .....	1.65	39.10	7.300	63.4	11.514	101.76	1.90
1979 .....	1.74	42.55	7.277	79.0	9.211	93.72	2.19
1980 .....	1.56	47.28	8.424	100.0	8.424	73.76	1.88
1981 .....	1.30	54.49	9.488	127.5	7.442	55.56	1.60
1982 .....	1.42	64.09	11.193	158.8	7.048	57.31	1.75
1983 .....	1.34	78.85	13.058	190.2	6.865	55.55	1.74
1984 .....	1.46	100.82	15.575	220.8	7.054	66.67	2.03
1985 .....	1.48	142.31	19.827	268.9	7.373	78.33	2.28
1986 .....	1.95	195.60	38.083	326.9	11.650	116.68	2.15

(1)  $PIN(t) = (\text{Precio interno } (t)) (100)/IPC(t)$

(2)  $PRE(t) = (\text{Precio externo } (t)) (\text{tasa de cambio } (t)) (100)/IPC(t)$

(3)  $MAR(t) = (\text{Pre. ext. } (t)) (\text{tasa de cambio } (t)) (214.8)/(\text{Prec. int. } (t))$

Nota: El precio interno (Columna (1)) se fija en pesos por saco de 125 Kgs. de café pergamino. Se necesitan 1.28 Kgs. de pergamino para producir 1 Kg. de verde. Hay 2.2 lbs. en cada Kg. Por lo tanto, en un saco de 125 Kgs. de pergamino hay 214.8 libras de verde.

resultado queda plenamente comprobado en la segunda regresión, donde observamos que la elasticidad del margen a cambios en el precio externo es del orden de 0.46.

En resumidas cuentas, los ejercicios econométricos indican que, por lo menos en cuanto a la relación entre el precio externo y el interno y el precio externo y el margen,

la realidad da soporte al modelo que hemos desarrollado. Infortunadamente, los demás resultados cualitativos que se desprenden del modelo no pueden ser comprobados con la evidencia empírica. Sin lugar a dudas, ello representa un fuerte vacío en nuestro trabajo.

Aspectos tan interesantes como el de los efectos de cambios en la demanda mundial

no son fáciles de corroborar empíricamente. En el modelo desarrollado, la demanda cambia exógenamente v. gr. cambia sin necesidad de que haya habido modificaciones en el precio externo. En la realidad, es bien sabido que épocas de demanda deprimida coinciden con épocas de elevados precios externos. Por tal razón, económicamente sería incorrecto asignarle a la demanda mundial el carácter de variable exógena.

De otra parte, el efecto del cambio en el costo de los insumos no se ha analizado económicamente por la sencilla razón de que no es posible construir una serie confiable para tal variable.

Finalmente, conviene hacer referencia al efecto de cambios en el precio externo sobre otras variables endógenas. Dada la relación positiva que existe entre el precio interno y el externo, resulta inmediato afirmar que alzas en el precio externo implican aumentos en la producción. Diversos estudios han corroborado la existencia de una relación positiva entre el precio interno y el nivel de producción. Con cifras para 1950-1986, Aparicio et. al (1986) encontraron la siguiente relación:

$$Y(t) = 7.52 + 0.0125 \text{ TEN} + 0.2664 \text{ DUM} + 0.2136 \text{ P}(t-4)$$

(4.48)                      (4.34)                      (2.16)

$$R^2 \text{ ajustado} = 0.878$$

$$D.W. = 2.437$$

Donde:

- Y = producción
- TEN = Tendencia
- DUM = Dummy; 0 para 1950-1976 y 1 en adelante
- P = Precio interno real.

El efecto de cambios en el precio externo sobre el arbitraje espacial no es fácil de comprobar empíricamente, por falta de cifras. Sin embargo, es bien sabido que en períodos de elevados precios externos suele aumentar la cifra oficial sobre consumo interno. Puesto que en principio no existe ninguna relación entre el precio de venta al consumidor nacional y el precio externo, no debería haber ninguna relación entre el consumo interno y el precio externo. Por tal razón, es válido presumir que los aumentos (por encima de tendencia) en las cifras reportadas de consumo interno en realidad están reflejando aumentos en el arbitraje espacial.

Finalmente, dado que en el modelo hemos reunido a todos los exportadores (privados y Fondo) en uno solo, nuestra variable "Ventas al Fondo" no es comparable con lo que en la realidad compra el Fondo. Por esa razón, no hemos intentado analizar empíricamente la relación entre el precio externo y las ventas al Fondo.

## Conclusiones

El modelo que se ha desarrollado en este trabajo permite realizar sugestivos análisis del manejo de la política cafetera en Colombia. Varios de los rasgos característicos hallados en el manejo cafetero en nuestro país, aparecen en el modelo como resultado de un proceso de maximización de un fondo de comercialización del grano. También sugiere la dirección de cambios en las variables de control, a causa de variaciones en las variables exógenas, en especial el precio externo, la demanda mundial y la tasa de interés.

Este modelo debe ser el principio del estudio académico, organizado y sistemático de las finanzas cafeteras del país. Con ello se complementará un importante esfuerzo que se está desarrollando en el análisis de los determinantes de la producción de café, por parte de varios economistas en el país.

Con respecto al Fondo del Café, creemos que la agenda para futuros trabajos de investigación incluye por lo menos dos grandes áreas. En primer lugar, los modelos teóricos deben incluir claramente aspectos financieros, que detallen el manejo de la deuda y las inversiones del Fondo, estableciendo sus relaciones con el ciclo de los precios internacionales. En segundo término, en el área de los estudios empíricos, las finanzas del Fondo Nacional del Café son un territorio muy promisorio para el análisis financiero y estadístico. Con seguridad numerosos indicadores y estadísticos se pueden desarrollar, con mucho provecho y con el objeto de obtener resultados que muestren la situación del Fondo y su relación con la caficultura doméstica y el mercado internacional.

## Referencias

Aparicio M., Carrasquilla A. y Steiner R. (1986). "Precio interno, producción, exportaciones e inventarios de café 1985-1995: Un primer análisis", *Mimeo*, Banco de la República, septiembre.

Federación Nacional de Cafeteros. (1983), "La producción, el ingreso de los productores y el Fondo Nacional del Café", *Mimeo*, noviembre.

Fedesarrollo. (1981), *Economía cafetera colombiana*.

Montenegro, A. (1984), "The optimal price of coffee and the optimal level of inventories of coffee in Colombia", *Mimeo*, East Setauket, N. Y., october.

Uribe, H. (1984), "El Acuerdo Internacional del Café frente a la acumulación de existencias", *Revista del Banco de la República*, julio.

### Apéndice 1

#### ESTABILIDAD DEL MODELO

La ecuación característica del modelo está dada por:

$$\text{DET} \begin{bmatrix} -q_s W - y & A \\ B & r + q_s W - y \end{bmatrix} = 0$$

donde y es la raíz característica

$$A = f' \cdot (1/v) + Y'$$

$$B = W_{q_{SS}} (P_d - (\epsilon / (1 + \epsilon)) \cdot P_c \epsilon) + (\epsilon / (1 + \epsilon)) \cdot I_{SS}$$

De esta ecuación se obtiene:

$$Y = r/2 \pm (r^2 + 4(A \cdot B + (r + q_s W) q_s W))^{1/2} / 2$$

donde obviamente un valor de y es positivo y el otro negativo, asegurando la estabilidad "saddle path" del modelo.

### Apéndice 2

#### DINAMICA COMPARATIVA

El equilibrio del estado estacionario del sistema implica que:

$$f(P_d/v) - Y(\epsilon P_c - P_d) - q(s)W = 0 \tag{A.1}$$

$$P_d(r + q_s W) + \alpha (I_s - q_s W P_c \epsilon) = 0 \tag{A.2}$$

donde:  $\alpha = \epsilon / (1 + \epsilon)$

El diferencial total del sistema en su estado estacionario se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} f'/v + Y' & -q_s W \\ r + q_s W & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dP_d \\ dS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_d \end{bmatrix} dr + \begin{bmatrix} Y' \\ \alpha W q_s \end{bmatrix} d(\epsilon P_c) + \begin{bmatrix} q \\ -q_s (p_d - \alpha \epsilon P_c) \end{bmatrix} dW + \begin{bmatrix} f' P_d / v^2 \\ 0 \end{bmatrix} c$$

donde:  $A = \alpha I_{SS} + W_{q_{SS}} (P_d - \alpha \epsilon P_c) > 0$

El determinante de la matriz de los coeficientes de las variables endógenas es:

$$D = (f'/v + Y') A + q_s W(r + q_s W) > 0$$

### ***A. Efecto de cambios en el precio externo y/o la tasa de cambio***

(i) Efecto sobre el precio interno:

$$\frac{dP_d}{d(eP_c)} = \frac{\begin{vmatrix} Y' & -q_s W \\ \alpha W q & A \end{vmatrix}}{D} = \frac{AY' + \alpha(q_s W)^2}{AY' + (q_s W)^2 + q_s W r + A f'/v}$$

Por lo tanto:

$$0 < \frac{dP_d}{d(eP_c)} < 1 \quad (\text{A.3})$$

(ii) Efecto sobre los inventarios:

$$\frac{dS}{d(eP_c)} = \frac{\begin{vmatrix} f'/v + Y' & Y' \\ r + q_s W & \alpha W q_s \end{vmatrix}}{D} = \frac{f' \alpha W q_s v + Y' (W q_s (\alpha - 1) - r)}{D} \cong 0 \quad (\text{A.4})$$

(iii) Efecto sobre la cuota:

$$\frac{dQ}{d(eP_c)} = \frac{d(q(s)W)}{d(eP_c)} = w \frac{\delta q}{\delta S} \frac{dS}{d(eP_c)} \cong 0 \quad (\text{A.5})$$

(iv) Efecto sobre la producción:

$$\frac{df}{d(eP_c)} = (f'/v) \frac{dP}{d(eP_c)} > 0 \quad (\text{A.6})$$

(v) Efecto sobre el margen:

$$\frac{d(eP_c - P_d)}{d(eP_c)} = 1 - \frac{dP_d}{d(eP_c)} > 0 \quad (\text{A.7})$$

(vi) Efecto sobre el arbitraje espacial:

$$\frac{dY}{d(eP_C)} = Y' \cdot \frac{d(eP_C - P_d)}{d(eP_C)} > 0 \tag{A.8}$$

(vii) Efecto sobre las ventas al Fondo:

$$\frac{dX}{d(eP_C)} = \frac{df}{d(eP_C)} - \frac{dY}{d(eP_C)} = (f'/v + Y') \frac{dP}{d(eP_C)} - Y' \geq 0 \tag{A.9}$$

**B. Efecto de cambios en la demanda interna:**

(i) Efecto sobre el precio interno:

$$\frac{dP_d}{dW} = \frac{\begin{vmatrix} q & -q_s W \\ -q_s(P_d - \alpha e P_C) & A \end{vmatrix}}{D} = \frac{Aq - W(q_s)^2(P_d - \alpha e P_C)}{D} > 0 \tag{A.10}$$

(ii) Efecto sobre los inventarios:

$$\frac{dS}{dW} = \frac{\begin{vmatrix} f'/v + Y' & q \\ r + q_s W & -q_s(P_d - \alpha e P_C) \end{vmatrix}}{D} = \frac{-q_s(P_d - \alpha e P_C)(f'/v + Y') - q(r + q_s W)}{D} \geq 0 \tag{A.11}$$

(iii) Efecto sobre la cuota:

$$\frac{dQ}{dW} = \frac{d(q(s)W)}{dW} = \frac{W\delta q}{\delta S} \cdot \frac{dS}{dW} + q \geq 0 \tag{A.12}$$

(iv) Efecto sobre la producción:

$$\frac{df}{dW} = (f'/v) \cdot \frac{dP_d}{dW} > 0 \tag{A.13}$$

(v) Efecto sobre el margen:

$$\frac{d(eP_C - P_d)}{dW} = \frac{-dP_d}{dW} < 0 \tag{A.14}$$

(v) Efecto sobre el margen:

$$\frac{d(eP_c - P_d)}{dv} = \frac{-dP_d}{dv} < 0 \tag{A.21}$$

(vi) Efecto sobre el arbitraje espacial:

$$\frac{dY}{dW} = Y' \frac{d(eP_c - P_d)}{dv} < 0 \tag{A.22}$$

(vii) Efecto sobre las ventas al Fondo:

$$\frac{dX}{dv} = \frac{df}{dv} - \frac{dY}{dv} \cong 0 \tag{A.23}$$

### ***D. Efecto de cambios en la tasa de interés***

(i) Efecto sobre el precio interno:

$$\frac{dP_d}{dr} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -q_s W \\ -P_d & A \end{vmatrix}}{D} = \frac{-q_s W P_d}{D} < 0 \tag{A.24}$$

(ii) Efecto sobre los inventarios:

$$\frac{dS}{dr} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma/v + Y' & 0 \\ r + q_s W & -P_d \end{vmatrix}}{D} = \frac{-P_d(\Gamma/v + Y')}{D} < 0 \tag{A.25}$$

(iii) Efecto sobre la cuota:

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{W}{\delta S} \frac{dS}{dr} < 0 \tag{A.26}$$

(iv) Efecto sobre la producción:

$$\frac{df}{dr} = \frac{\Gamma}{v} \frac{dP}{dr} < 0 \tag{A.27}$$

(v) Efecto sobre el margen:

$$\frac{d(eP_c - P_d)}{dr} = \frac{-dP_d}{dr} > 0 \quad (\text{A.28})$$

(vi) Efecto sobre el arbitraje espacial:

$$\frac{dY}{dr} = Y' \frac{d(eP_c - P_d)}{dr} > 0 \quad (\text{A.29})$$

(vii) Efecto sobre las ventas al Fondo:

$$\frac{dX}{dr} = \frac{df}{dr} - \frac{dY}{dr} < 0 \quad (\text{A.30})$$