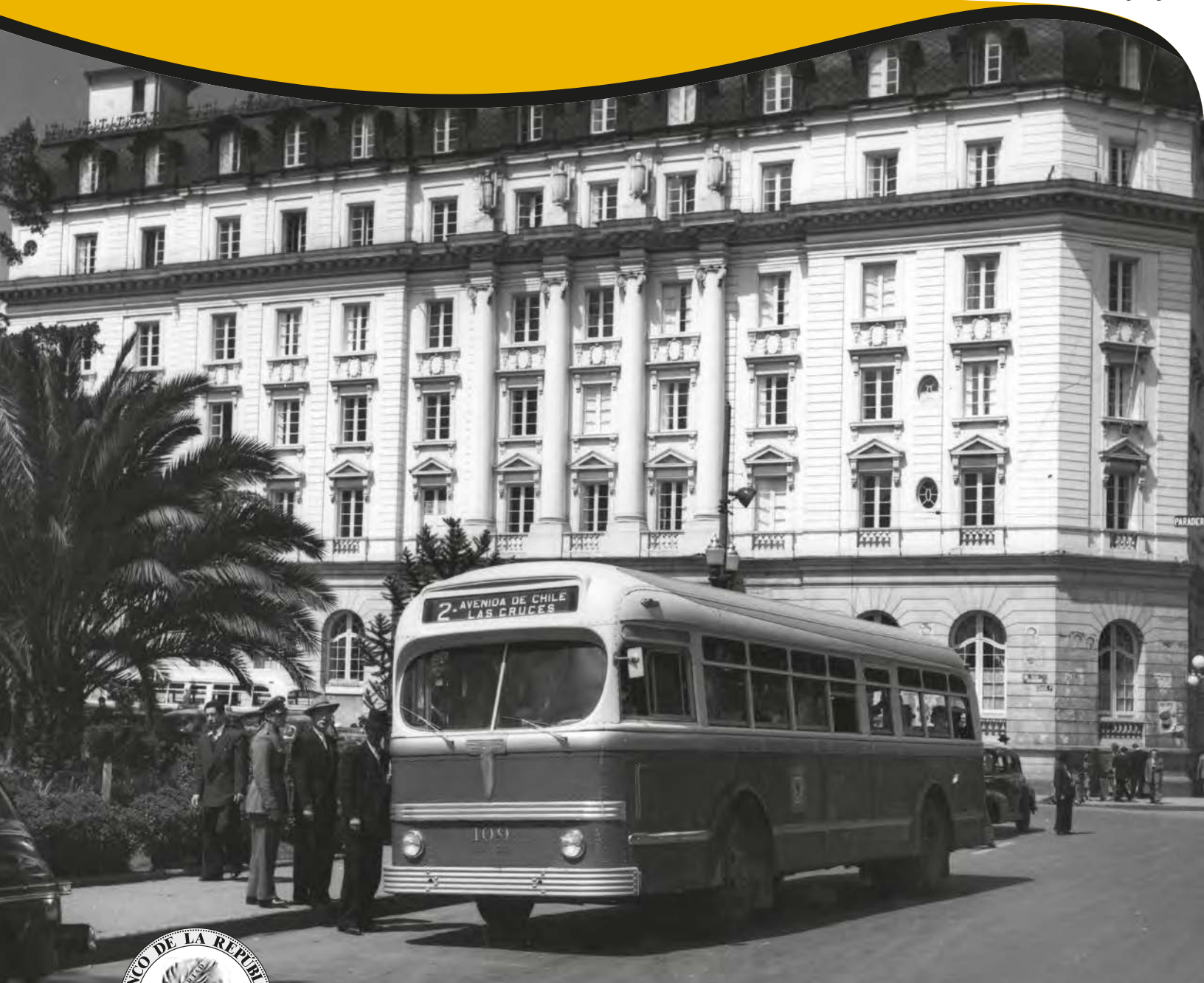


# Borradores de ECONOMÍA

Límite de la Deuda Pública y  
Espacio Fiscal: Análisis para  
Colombia y Otros Mercados  
Emergentes

Por: Ignacio Lozano-Espitia  
Juan Manuel Julio-Román

Núm. 1076  
2019



Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia - Bogotá - Colombia

# Límite de la Deuda Pública y Espacio Fiscal: Análisis para Colombia y Otros Mercados Emergentes

Ignacio Lozano-Espitia y Juan Manuel Julio-Román\*

Las opiniones contenidas en el presente documento son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva.

## Resumen

En este documento se analiza el límite de la deuda pública y el espacio fiscal para Colombia y otras economías emergentes, bajo el enfoque de la *fatiga fiscal* (Ghosh et. al., 2013). El estado de fatiga se presenta en situaciones de incrementos continuos de la deuda y del pago de los intereses, que llevan a que los esfuerzos del gobierno para generar superávits primarios se deterioren. El trabajo utiliza la técnica de los *splines* para estimar la reacción del gobierno a la dinámica de deuda y plantea una prima de riesgo endógena a su evolución. Las estimaciones se realizan con un panel desbalanceado de trece economías, seis de la región, para el periodo 1985–2016. Los resultados sugieren que el límite de la deuda pública de país se situaría en 56% del PIB y el espacio fiscal ascendería a 7 p.p. del producto, el cual luce estrecho especialmente por la sensibilidad de la deuda a los choques externos. Frente a otros países de la región, Chile cuenta con el mayor espacio fiscal, al tiempo que México y Ecuador, con endeudamientos cercanos al colombiano, disponen de menor espacio.

Clasificación JEL: E27, E44, E61, E62, H62, H63, H68

Palabras Clave: Deuda; Sostenibilidad; política fiscal; balance primario

---

\* Investigadores principales de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República: [ilozanes@banrep.gov.co](mailto:ilozanes@banrep.gov.co) y [jjulioro@banrep.gov.co](mailto:jjulioro@banrep.gov.co). Los autores expresan su agradecimiento a Paula Madrigal por su excelente trabajo de asistencia.

# Public Debt Limit and Fiscal Space: Analysis for Colombia and Other Emerging Markets

Ignacio Lozano-Espitia y J. Manuel Julio-Román

## Abstract

This paper assesses the public debt limit and fiscal space for Colombia and some emerging economies, under the fiscal fatigue approach (Ghosh et al., 2013). The fatigue phenomenon occurs under situations of continuous increases of both debt and interest payments, which lead to government's efforts to obtain primary surpluses to deteriorate. The paper uses the spline technique to estimate the government's reaction function to debt dynamics and proposes a sovereign risk premium endogenous to the level of indebtedness. Estimates carry out with an unbalanced panel of thirteen economies, six of them from Latin America, for the period 1985-2016. Results suggest that the limit of Colombian public debt would be 56% of GDP and that fiscal space would amount to 7 points of GDP, which looks so narrow due to the debt sensitivity to external shocks. In front of other countries, Chile has the largest fiscal space, while Mexico and Ecuador, with comparable indebtedness to the Colombian, have lower spaces.

JEL Classification: E27, E44, E61, E62, H62, H63, H68

Key Words: Debt, sustainability, fiscal policy, primary balance

## 1. Introducción

El análisis sobre la sostenibilidad de la deuda pública y el límite fiscal es especialmente relevante en las fases bajas del ciclo económico, cuando la posición fiscal de los países se deteriora, aumenta la deuda pública y crece la incertidumbre sobre la solvencia del gobierno para honrar sus compromisos. La evidencia de los últimos años así lo confirma. Luego de la crisis global de 2008, la deuda pública de las economías avanzadas aumentó, en promedio, 33 puntos del producto, al pasar de 74% a 107% del PIB entre 2007 y 2012. A pesar de la recuperación del crecimiento de los últimos años, ese nivel no ha cedido mayormente (105% en 2017) y, de acuerdo con los últimos pronósticos del Fondo Monetario Internacional, FMI, podría tomar varios lustros más para regresar a los niveles registrados antes de la crisis.

La situación de las economías emergentes registrada en los últimos años, también ilustra este fenómeno. La desaceleración provocada por caída del precio de las materias primas a mediados de 2014, terminó deteriorando la posición fiscal de los gobiernos y aumentando su nivel de endeudamiento. En América Latina, por ejemplo, la deuda de los países emergentes aumentó 13 puntos del producto, en promedio, ascendiendo hasta el 62% del producto en 2017. Los pronósticos del FMI tampoco son alentadores, pues indican que, por la frágil recuperación que se está registrando en la región, la deuda pública podría seguir al alza hasta 68% del PIB en 2023. Los nuevos niveles de endeudamiento, tanto de las economías avanzadas como emergentes, no sólo aumentan la incertidumbre sobre su sostenibilidad, sino que también reducen el espacio fiscal que podrían requerir los gobiernos para afrontar eventuales choques en el futuro. Estos hechos motivan este documento de trabajo que explora la sostenibilidad de la deuda pública y evalúa el eventual espacio fiscal de Colombia un de un grupo de economías emergentes de la región.

Los estudios de sostenibilidad parten de una condición básica según la cual, el saldo actual de la deuda de un gobierno será sostenible siempre y cuando el valor futuro descontado de los superávits primarios exceda, o por lo menos iguale, al valor de dicho saldo. El pronóstico sobre los balances primarios se constituye, por consiguiente, en la señal principal de solvencia. Si el gobierno prevé superávits primarios hacia el futuro, la sostenibilidad de la deuda estará garantizada en el largo plazo. De lo contrario, se requerirán ajustes en sus finanzas para crear las condiciones de cumplimiento a los acreedores.

La condición básica sostenibilidad contiene algunos elementos que deben ser precisados para convertirla en un instrumento operativo. El primero tiene que ver con

el horizonte de los pronósticos. Si bien, en rigor, la condición contempla un horizonte infinito, se asume el llamado esquema no-ponzi (o condición de transversalidad), con lo cual se asegura que la deuda se paga en algún momento futuro (es decir se descarta el *default*). Para acotar el tiempo de pronóstico, una opción es considerar el plazo (medio) de emisión de los títulos, que se va ampliando en la medida que se profundiza el mercado de deuda pública. Por ejemplo, hoy en día el período de referencia de los títulos de Tesorería, TES, del gobierno colombiano es de 16 años, mientras el plazo medio veinte años atrás era inferior a 5 años. Otra alternativa es tomar el horizonte de pronósticos de los Marcos Fiscales de Mediano Plazo, MFMP, que para Colombia es de 10 años, y que dan una idea oficial sobre la trayectoria esperada tanto del balance primario como de la deuda.

El segundo elemento está asociado con la gran incertidumbre que usualmente conllevan las proyecciones del balance primario del gobierno y que puede llevar sencillamente a errores de pronóstico. En los ejercicios de predicción de los ingresos y gastos, se emplean variables macroeconómicas, sectoriales y normas que le imponen obligaciones al ejecutivo, para obtener escenarios centrales y alternativos. Desde el primer MFMP en 2003, los pronósticos fiscales del gobierno colombiano han anunciado sistemáticamente sendas positivas del balance primario con reducciones permanentes de la deuda, para los siguientes diez años.<sup>1</sup> Sin embargo, al contrastar esos pronósticos con los resultados, se encuentra que sólo en 4 de las últimas 15 vigencias, el gobierno nacional ha obtenido balances primarios positivos, lo cual ilustra los desaciertos en las predicciones (ver detalles de estos resultados en Lozano I, 2019).<sup>2</sup>

El tercero está relacionado con la tasa de descuento que se utiliza en los ejercicios de sostenibilidad y que viene definida por el diferencial entre la tasa de interés real de la deuda y la tasa de crecimiento económico per cápita. Ese diferencial, que captura el entorno macroeconómico, influye considerablemente en los resultados, pues es evidente que una menor tasa de descuento, por ejemplo, por una tasa más elevada de crecimiento de la economía, *ceteris paribus*, aumenta el valor descontado del balance primario, dándole al gobierno mayor capacidad de endeudamiento. La tasa de interés real contempla tanto la tasa de los títulos emitidos en el mercado local, como la tasa de los emitidos en los mercados internacionales. Ésta última estará afectada, por consiguiente, por las primas de riesgo soberano. Además, la deuda denominada en

---

<sup>1</sup> Los Marcos Fiscales de Mediano Plazo del gobierno colombiano, se pueden consultar en [www.minhacienda.gov.co](http://www.minhacienda.gov.co)

<sup>2</sup> Lozano I, (2019). La política fiscal y la estabilización macroeconómica en Colombia. En Ensayos Sobre Política Económica, N°90, (Coordinador)

moneda extranjera podría tener cambios importantes en su valoración, por la devaluación o revaluación de la moneda local.

Dentro de opciones que ofrece la literatura para analizar la sostenibilidad de la deuda y el espacio fiscal, en este documento se adecúa para Colombia y otras economías emergentes, la estrategia empírica seguida por Ghosh, Kim, Mendoza, Ostry y Qureshi (2013). Estos autores desarrollan dicho análisis para un grupo importante de economías avanzadas bajo el concepto de “fatiga fiscal”, concepto que captura la posible reacción del gobierno ante aumentos sucesivos de la deuda. De acuerdo con su enfoque, en la medida que un país alcanza niveles moderadamente altos de deuda, el gobierno requiere mayores superávits primarios para contener su expansión y no perder acceso a los mercados. No obstante, si la deuda sigue aumentando, por razones exógenas, el gobierno se podría fatigar al tratar de mantener la senda creciente de superávit primarios, lo cual la llevaría a un límite, más allá del cual tendría problemas para honrarla.

El trabajo contiene 4 secciones adicionales a esta introducción. En la sección 2 se presenta el enfoque de sostenibilidad que seguirá este documento, que incluye tanto la aritmética básica como la función de reacción del gobierno, que describe la fatiga fiscal. En la sección 3 se describe la estrategia empírica, que se diferencia en varios aspectos a los trabajos previos sobre este tema. En la sección 4 se presentan los resultados sobre espacio fiscal y límites de la deuda, inicialmente para Colombia y luego para el grupo de economías emergentes que se usan en las estimaciones. Finalmente, en la sección 5 se dan las conclusiones.

## 2. Enfoque sobre la Sostenibilidad de la Deuda

### 2.1 La Aritmética Básica

La condición básica de sostenibilidad parte definiendo la restricción presupuestaria del gobierno, como una identidad entre la emisión neta de deuda y la diferencia entre el pago de intereses, el balance primario y los ingresos por señoreaje. Esta última fuente de ingresos proviene de la banca central, por el monopolio que se le concede de imprimir el papel moneda. Siguiendo la notación del *Handbook on Fiscal Sustainability in Theory and Practice* (2005), la identidad se expresa como:

$$B_t - B_{t-1} = I_t - S_t - (M_t - M_{t-1}) \quad (1)$$

Donde  $B_t$  corresponde al saldo de la deuda pública al final del periodo  $t$ ,  $I_t$  al pago de intereses,  $S_t$  el balance primario y  $M_t$  la base monetaria al final del periodo  $t$ . Inicialmente, todas las variables se expresan en términos nominales. Para derivar la restricción intertemporal, se asume por simplicidad que el gobierno remunera su deuda a una tasa de interés real constante,  $r$ . La ecuación (1) se reescribe en términos reales utilizando el nivel de precios  $P_t$ , que usualmente corresponde al deflactor del PIB,

$$\frac{B_t - B_{t-1}}{P_t} = \frac{I_t - S_t - (M_t - M_{t-1})}{P_t} \quad \text{o} \quad \hat{b}_t = (1 + r)\hat{b}_{t-1} - \hat{s}_t - \hat{\sigma}_t \quad (2)$$

donde  $(M_t - M_{t-1})/P_t = \hat{\sigma}_t$  es el valor real de los ingresos por señoreaje y el gorro,  $\hat{\cdot}$ , sobre las variables, las expresa en términos reales. Despejando  $\hat{b}_{t-1}$  y actualizando  $t$  se obtiene:

$$\hat{b}_{t-1} = \frac{\hat{b}_t + \hat{s}_t + \hat{\sigma}_t}{(1+r)} \quad \text{o} \quad \hat{b}_t = \frac{\hat{b}_{t+1} + \hat{s}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1}}{(1+r)} \quad (3)$$

Nótese que las dos expresiones de (3) se pueden combinar (es decir, se sustituye  $\hat{b}_t$  en  $\hat{b}_{t-1}$ ), de manera que:

$$\hat{b}_{t-1} = \hat{b}_{t+1}(1+r)^{-2} + (\hat{s}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1})(1+r)^{-2} + (\hat{s}_t + \hat{\sigma}_t)(1+r)^{-1} \quad (4)$$

Este procedimiento se aplica recursivamente, de forma que luego de varias iteraciones se encuentra:

$$\hat{b}_{t-1} = (1+r)^{-(k+1)} E_t(\hat{b}_{t+k}) + \sum_{l=0}^k (1+r)^{-(l+1)} E_t(\hat{s}_{t+l} + \hat{\sigma}_{t+l}) \quad (5)$$

donde  $E_t(\cdot)$  denota el operador de expectativas. La expresión (5) establece la relación entre la deuda de dos periodos,  $t-1$  y  $t+k$ . En particular, implica que la deuda de cualquier tiempo  $t+k$  es una función de la deuda inicial  $t-1$ . Se espera que la deuda se pague en algún momento en el futuro, es decir, que cuando  $t \rightarrow \infty$ , el endeudamiento del gobierno sea nulo (llamada condición de transversalidad o condición No-Ponzi),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1+r)^{-(k+1)} E_t(\hat{b}_{t+k}) = 0 \quad (6)$$

Entonces se encuentra la Restricción Presupuestaria Intertemporal (RPI) de largo plazo del gobierno, que viene dada por:

$$\hat{b}_{t-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (1+r)^{-(l+1)} E_t(\hat{s}_{t+l} + \hat{\sigma}_{t+l}) \quad (7)$$

La expresión (7) sugiere que la deuda inicial del gobierno debe ser igual, en el límite, a la senda futura descontada esperada de superávits primarios y que los ingresos por señoreaje podrían compensar esas necesidades de financiamiento. Para comprender mejor la relación de largo plazo entre el balance primario y la deuda, se hace necesario finalmente expresar las variables en términos del producto real ( $y_t$ ); es decir, definir la relación deuda a producto como  $b_t = \hat{b}_t/y_t$ , y el superávit primario como  $s_t = \hat{s}_t/y_t$ . Adicionalmente, para simplificar se asume que la masa monetaria varía muy poco en el tiempo, de manera que los ingresos por señoreaje se vuelven marginales o cero (en el límite  $\hat{\sigma} = 0$ ). Teniendo en cuenta que  $\frac{y_{t-1}}{y_t} = \frac{1}{1+g}$ , donde  $g$  es la tasa de crecimiento real de la economía, que se asume constante, entonces (7) se puede re-escribir como

$$b_{t-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1+r}{1+g}\right)^{-(l+1)} E_t(s_{t+l}) \quad (8)$$

La condición básica de sostenibilidad (ecuación 8) revela que si el valor esperado descontado de los superávits primarios futuros (lado derecho) es mayor o igual a la deuda inicial (lado izquierdo), ésta será sostenible. Nótese que la tasa de descuento de los superávits primarios futuros no sólo está determinada por la tasa de interés real, como en (7), sino también por la tasa de crecimiento de la economía.

## 2.2 La Función de Reacción (No Lineal) del Gobierno

En la condición de sostenibilidad de largo plazo (ecuación 8), es evidente que el saldo inicial de la deuda ( $b_{t-1}$ ) es una variable predeterminada para el gobierno y que sus acciones de política recaerán en el balance primario ( $s_t$ ), tanto del período corriente como de los  $l$  períodos futuros. Para ajustar ese modelo intertemporal a un marco de análisis de más corto plazo, se retoma la restricción presupuestal del gobierno en dos períodos (ecuación 2) y se reescribe en términos del producto, dejando de lado el señoreaje como fuente de financiación.

$$b_t = \left(\frac{1+r}{1+g}\right) b_{t-1} - s_t \quad (9)$$

Si se sustrae  $b_{t-1}$  a cada lado de (9) y, además, se asume que  $b_t - b_{t-1} = 0$ , entonces

$$b_t - b_{t-1} = (r - g)b_{t-1} - s_t; \quad \text{o} \quad s_t = (r - g)b_{t-1} \quad (10)$$

La expresión (10) indica que una postura fiscal de corto plazo coherente con la sostenibilidad de la deuda, requiere que, al menos, la deuda no aumente (es decir, que

$b_t - b_{t-1} = 0$ ). Para ello, la cuantía del superávit primario para el período  $t$ , debe ser de  $s_t = (r - g)b_{t-1}$ . Este es el punto de partida retomado por Ghosh et. al. (2013) para su análisis sostenibilidad de la deuda bajo “fatiga fiscal”, quienes establecen una relación no lineal entre balance primario y deuda (función de reacción no lineal del gobierno).

Los antecedentes de la relación no lineal entre el balance primario y la deuda se remontan a Bohn (2008, 1998, 1991); Trehan y Walsh (1991), entre otros, quienes arguyen que una condición para que haya sostenibilidad, es que exista una correlación positiva entre estas variables. En particular, si la relación es lineal, del tipo  $s_t = \rho b_{t-1}$ , la deuda disminuirá a razón de  $(1 - \rho)$  por año, de manera que en  $n$  periodos,  $(1 - \rho)^n$ , será igual a 0, cumpliéndose la condición de no-ponzi. Sin embargo, también argumentan que es plausible asumir no-linealidad en la relación, siempre que exista un nivel de deuda  $b_{t-1}$  y una función  $f(\cdot)$  que satisfaga  $f'(b) > \rho > 0$  para todo  $b \geq b_{t-1}$ . Esta condición asegura que la deuda futura sea menor que la contemplada en la especificación lineal, dado que año tras año se reduce a mayor velocidad. Así las cosas, la función de reacción del gobierno estará dada por:

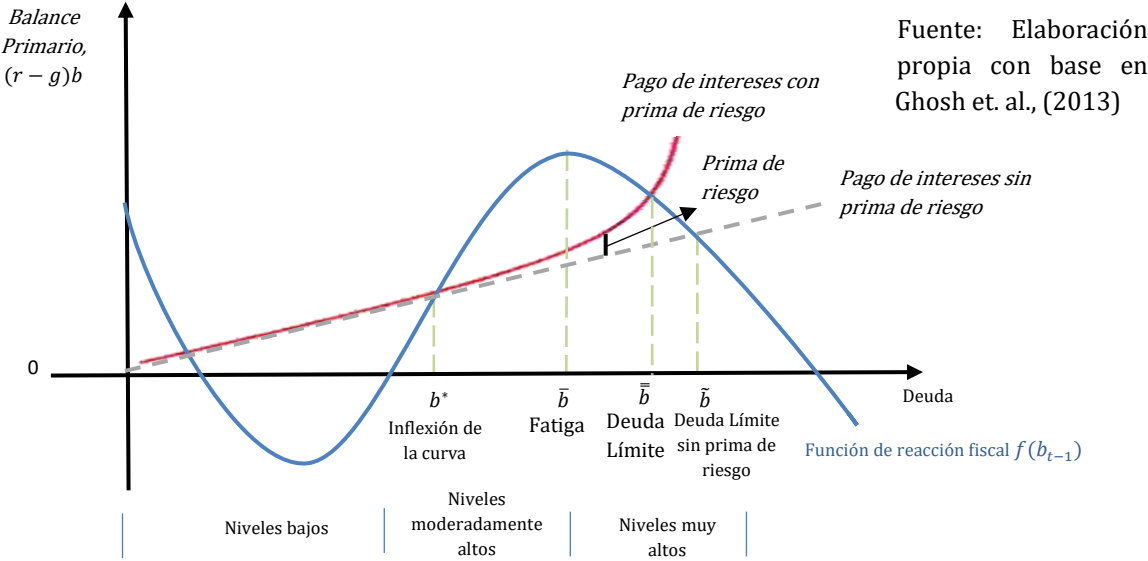
$$s_t = \mu_t + f(b_{t-1}) \tag{11}$$

donde  $\mu_t$  representa los “otros” determinantes del balance primario. Ghosh et. al (2013) introduce el concepto de “fatiga fiscal”, estableciendo  $f(\cdot)$  como una reacción cúbica de la deuda rezagada, del tipo  $s_t = \mu_t + b_{t-1} + b_{t-1}^2 + b_{t-1}^3$ . La forma funcional surge del comportamiento de los datos históricos para una muestra de 24 economías avanzadas. En  $\mu_t$  se incluyen variables macroeconómicas recomendadas por la literatura, tales como la brecha del producto, la brecha del gasto público en consumo, la apertura comercial, la inflación, la dependencia poblacional, si el país posee regla fiscal o si tiene acuerdos con el FMI.

La Gráfica 1 ayuda a entender su razonamiento. En ella se muestra la evolución esperada del balance primario del gobierno, frente a diferentes niveles de endeudamiento (curva en color azul). La línea punteada de pendiente positiva representa el pago de los intereses a una tasa libre de riesgo, que no depende del nivel de deuda, mientras que la línea roja, superpuesta al comienzo, si incluye dicha prima, y será creciente a partir de cierto nivel de endeudamiento. Este último caso es el relevante para las economías emergentes, donde las primas de riesgo son muy sensibles al nivel de la deuda y a las perspectivas fiscales. La deuda se subdivide arbitrariamente en niveles bajo, moderadamente altos y muy altos, y la reacción del balance primario frente a su evolución toma la forma de una función cúbica.

El tramo de deuda relevante para el análisis de sostenibilidad comienza cuando un país entra en niveles moderadamente altos (alrededor de  $b^*$ ), pues es a partir de allí, donde un gobierno responsable generara mayores superávits primarios para no perder acceso a los mercados. Nótese que, a partir de ese nivel  $b^*$ , la prima de riesgo podría aumentar. Sin embargo, puede ocurrir que, ante incrementos adicionales de deuda, el gobierno se fatigue al tratar de mantener la senda creciente de superávit primarios. El escenario crítico de la “fatiga fiscal” se presenta después de  $\bar{b}$ , cuando se empiezan a registrar deterioros en el balance primario que llevarían a la deuda a un “límite” ( $\bar{\bar{b}}$ ), entendido como aquel nivel no deseable de alcanzar, puesto que el gobierno tendría problemas para responder por sus obligaciones. Una vez identificados esos niveles críticos de deuda, el espacio fiscal disponible para un gobierno estaría dado por la diferencia entre dicho límite y el nivel actual de la deuda.

Gráfica 1. Fatiga Fiscal: Función de Reacción y Determinación de la Deuda Límite



### 3. Estrategia Empírica

#### 3.1 Los datos

Se selecciona una muestra de 13 economías, la mayoría correspondiente a mercados emergentes de ingresos medio y medio-alto. En la muestra se incluyen seis países de América Latina, incluido Colombia. Esta escogencia se realiza para conformar un grupo de referencia más afín, pues el nivel y la dinámica de la deuda de las economías

avanzadas cambiaron con la crisis financiera de 2008. Se incluyen además algunas economías de la OECD con altos niveles de deuda, para darle mayor varianza a los datos. Para mantener coherencia de la información entre los países, se utilizan las bases de datos del WEO 2018 (World Economic Outlook) y del IFS 2018 (International Financial Statistics), del FMI. Puesto que la cobertura difiere entre los países, en especial para América Latina que tiene menos datos disponibles, se conforma un panel de datos desbalanceado con periodicidad anual desde 1980 a 2016<sup>3</sup>. La información fiscal corresponden al gobierno general, es decir que se incluyen las operaciones de los gobiernos central, estatales y locales.<sup>4</sup> En el Cuadro 1 se presenta la deuda bruta para el grupo de países de América Latina y para los otros países seleccionados en la muestra (algunos años, desde 1996).

Cuadro 1. Deuda Bruta del Gobierno General para la Muestra  
(Algunos años seleccionados, porcentajes del PIB)

	1996	2000	2002	2005	2008	2011	2014	2017
Brasil	n.d	65.6	78.9	68.7	61.9	61.2	62.3	84.0
Chile	14.7	13.2	15.2	7.0	4.9	11.1	15.0	23.6
<b>Colombia</b>	<b>23.4</b>	<b>38.1</b>	<b>47.7</b>	<b>38.6</b>	<b>32.4</b>	<b>35.8</b>	<b>43.3</b>	<b>49.4</b>
Ecuador	n.d	n.d	52.2	34.7	24.2	16.8	27.1	45.4
México	44.7	40.3	41.9	38.5	42.5	42.9	48.9	54.3
Perú	n.d	44.4	45.0	40.0	27.9	23.0	20.7	25.4
Australia	29.4	19.6	15.1	10.9	11.8	24.2	34.1	40.8
Bélgica	128.0	108.8	104.7	94.7	92.5	102.6	107.0	103.4
Dinamarca	68.3	52.4	49.1	37.4	33.3	46.1	44.3	35.3
Corea Sur	8.2	17.1	17.6	27.0	28.2	31.5	37.3	39.5
Islandia	55.4	37.2	39.1	24.5	66.1	92.0	79.7	40.0
Japón	101.0	137.9	156.8	176.8	183.4	222.1	236.1	237.6
Nueva Zelanda	37.3	30.0	26.4	20.8	19.0	34.7	34.2	31.7
Memo Item Prom A. Latina	n.d	46.7	59.2	50.4	46.0	47.9	50.6	61.1

n.d: No disponible

Fuente: World Economic Outlook Databases Octubre 2018, FMI.

Algunas variables sugeridas por la literatura, se utilizan como controles en la estimación. La brecha del producto y la brecha del gasto en consumo del gobierno general se calculan utilizando el filtro Hodrick-Prescott. Se incluye además la

<sup>3</sup>Hasta 2017 para Colombia.

<sup>4</sup> Para mayor detalle de la definición de los rubros cubiertos por el gobierno general, referirse a las series "Fiscal Monitor" y "Artículo IV" del FMI.

apertura comercial como el cociente entre exportaciones netas y el PIB, y la inflación de los precios al consumidor, definida como el promedio de los últimos tres años para capturar su posible impacto rezagado sobre el balance fiscal. Además se tiene en cuenta mediante variables *dummie*, si los países tienen regla fiscal, como proxy de la responsabilidad fiscal, y si tienen acuerdos con el FMI<sup>5</sup>. Finalmente, como medida demográfica se toma el grado de dependencia poblacional de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), como el coeficiente entre el grupo de la población menor a 14 y mayor a 64 años y el grupo entre 15 a 63 años.

Sobre la tasa de interés real y crecimiento real per cápita de la economía, se acude a la siguiente información: Para los países de América Latina, el cálculo de la tasa de interés corresponde a tasa real de los depósitos, disponible para el período 2008 a 2017 por el Banco Mundial<sup>6</sup>. Para el resto de países, la tasa de interés corresponde a la tasa implícita de la deuda, suministrada por el *Artículo IV* de cada país para el período 2006-2017. Del Banco mundial también se toma la tasa de crecimiento real per cápita de toda la muestra.

### 3.2 Etapas y Técnica de Estimación

El cálculo del límite de la deuda y el espacio fiscal se realiza en tres pasos. En el primero se estima la función de reacción del gobierno, en un ambiente de panel de países; en el segundo se estima el margen entre la tasa de interés real y el crecimiento económico per cápita para cada país, de manera que tenga en cuenta la prima de riesgo y, finalmente, con la información obtenida en los pasos uno y dos, se estima el límite de la deuda y el correspondiente espacio fiscal.

#### a. Estimación de la función de reacción fiscal del gobierno

La reacción fiscal del gobierno a la evolución de la deuda en las economías emergentes no necesariamente se debe comportar como la reacción sugerida y estimada por Ghosh et. al. (2013) para las economías avanzadas. Bajo el modelo de la “fatiga fiscal”, la reacción fiscal de las economías avanzadas sigue, en promedio, una forma funcional cúbica. Para los mercados emergentes, sin embargo, la información fiscal estandarizada infortunadamente no es muy amplia, tanto en el horizonte temporal como en el número

---

<sup>5</sup> Recopilación desde el FMI - Fiscal Rules Dataset y Member Financial Data, respectivamente.

<sup>6</sup>La diferencia entre el cálculo de la tasa de interés real, se debe a que los Artículos IV para América Latina presentan periodos heterogéneos entre países, además, varios años son estimaciones del FMI.

de países. Al observar los datos fiscales para la muestra seleccionada, se encuentra que una función cúbica, podría generar restricciones muy fuertes que impiden el ajuste adecuado de los datos. Por esta razón, se propone utilizar una técnica de estimación ligeramente diferente, conocida como el “spline cúbico”, que es más flexible.

Cabe recordar que el polinomio de una función cúbica,  $f$ , tiene tres raíces y dos puntos críticos: un máximo y un mínimo, locales. Adicionalmente, que la derivada de la función es negativa,  $f'(b) < 0$ , para un nivel de  $b$  grande, por lo que el polinomio  $f$  satisface también la propiedad de incumplimiento; es decir, en la medida que  $b$  crece más allá de su límite, el balance primario diverge a  $-\infty$ . Así las cosas, restringir a que el balance primario responda a la deuda en forma estrictamente cúbica, impone dos restricciones fuertes, que pueden sesgar los resultados. Por una parte, a que también exista una pendiente negativa del balance primario para niveles pequeños de deuda, lo cual no es una predicción del modelo. Y, por otra, a que la amplitud de las dos “alas” de la función sea simétrica (tomando como centro el punto de inflexión), y que la deuda se distribuya equitativamente entre esas dos “alas”. Las condiciones que se imponen sobre la función de reacción, con el uso del *spline* son substancialmente menores a las que impone la función cúbica.

**El Spline Cúbico.** Esta técnica es utilizada para aproximar el comportamiento de una variable a una función desconocida ( $h$ ), conociendo únicamente algunos puntos. Para este caso, se conocen los puntos de la relación entre balance primario y deuda de trece economías, y se busca aproximar la función de reacción fiscal del gobierno a un comportamiento cúbico; de ahí el concepto de *spline* cúbico. Para hacer la aproximación se requiere, en la práctica, construir un conjunto de polinomios, definidos entre varios segmentos de deuda, capaces de acercarse a la función  $h$ . Los segmentos de la deuda se definen entre valores arbitrarios que se conocen como nodos ( $\pi_k$ ). En nuestra estimación se consideran cinco nodos (niveles de deuda como porcentaje del PIB): 0, 50, 100, 150 y, por último, el dato más alto observado en la muestra.

Un aspecto a subrayar en la estimación es que la aproximación a  $h$ , no se genera directamente desde los polinomios, sino a partir de la llamada *base spline*, conformada por un vector de *splines* cúbicos definidos sobre el dominio de  $h$ , es decir, los datos ubicados entre el primer nodo (cero) y el último. Como resultado, se obtiene una matriz cuyo número de columnas está dado por los grados de libertad de la estimación, es decir, tres por el grado de polinomio cúbico, y tres por los nodos internos. Al incluirlos en la regresión de la función de reacción fiscal, se obtienen seis coeficientes, cuya significancia conjunta depende de que al menos uno lo sea. Los detalles sobre las bases *splines* para polinomios de cualquier orden y la significancia conjunta, se encuentran en

De Boor (2001). Otros por menores de la técnica de estimación se incluyen en el Apéndice A.

Al retomar la ecuación (11) en un ambiente de panel de países, en su forma reducida, se tiene:

$$s_{i,t+1} = \mu_{i,t+1} + f(b_{i,t}) + \varepsilon_{i,t+1} \quad (12)$$

donde  $\mu$  representa todos los determinantes sistemáticos diferentes a la deuda rezagada que afectan el balance primario del país  $i$  y  $\varepsilon$  es una innovación independiente e idénticamente distribuida, la cual está acotada en el intervalo  $[-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ , debido a que el superávit primario es acotado (su tamaño es sólo de unos pocos puntos del PIB). Por su parte, la función  $f$  se aproximará mediante la aplicación de un B-spline cúbico, de la siguiente forma:

$$f(b_{i,t}) = \sum_{k=1}^6 \varphi_{kt} (b_{i,t}) \quad (13)$$

Donde  $\varphi_{kt}$  corresponden a los seis vectores columna, calculados en función de los datos de deuda de la muestra completa, ordenados ascendientemente. Luego, se incluyen en la estimación los demás controles, es decir que:

$$s_{i,t+1} = c_i + \sum_{k=1}^6 \beta_k \varphi_{kt} (b_{i,t}) + \Theta \mu_i + \varepsilon_{i,t+1} \quad (14)$$

donde  $c$  capturaré el efecto fijo de país,  $\beta_k$  corresponderá al parámetro estimado para cada uno de los vectores resultantes de la aplicación del "spline"<sup>7</sup>, y  $\Theta$  a los parámetros estimados de los controles. La ecuación (14) se estima por mínimos cuadrados generalizados factibles y se permite autocorrelación de grado uno, por lo que los errores siguen un proceso  $\varepsilon_{i,t+1} = \rho \varepsilon_{i,t} + \nu_{i,t+1}$ .

#### b. Estimación del margen entre la tasa de interés real y el crecimiento económico per cápita

En la segunda etapa se estima el margen entre la tasa de interés real y el crecimiento económico per cápita de cada uno de los países de la muestra. En el trabajo original para las economías avanzadas de Ghosh et. al., (2013), se parte de un bajo nivel de

---

<sup>7</sup>La significancia conjunta de estos parámetros depende de que al menos uno de ellos sea estadísticamente significativo.

penalización por riesgo, con lo que se define una cota superior para el límite de la deuda (notada por  $\tilde{b}$  en la Gráfica 1), que cumple con la propiedad de ser la raíz más grande de la ecuación:

$$c_i + \sum_{k=1}^6 \beta_k \varphi_{kt} (b_{it}) + \Theta \mu_i + \varepsilon_{i,t+1} = (r_i - g_i) b_{i,t} \quad (15)$$

Sin embargo, debido al hecho que la prima de riesgo es endógena a la probabilidad de incumplimiento y, por consiguiente, crece con la deuda, la tasa de interés sigue una senda creciente y convexa que se torna infinita antes de  $\tilde{b}$ . Para capturar la presencia de esta prima de riesgo creciente con el nivel de deuda, especialmente para las economías emergentes, en este trabajo se propone estimar la tasa de interés de la siguiente forma:

$$r_{i,t} = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{(\tilde{b}_i - b_{i,t})^\beta} - \delta_i & \text{si } b_{i,t} < \tilde{b}_i \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (16)$$

donde  $\gamma$ ,  $\delta$  y  $\beta$  son parámetros que se calibran. En particular,  $\delta_i$ , se calibra de tal forma que la prima de riesgo para el país  $i$  sea cero, cuando su correspondiente deuda es cero. Por su parte,  $\beta$  y  $\gamma_i$  se calibran bajo la siguiente doble condición: (i) que para cada  $i$  la prima de riesgo sea igual a la presentada en el 2017 y, (ii) que sea consistente con el nivel de deuda observado en el mismo año.

### c. Calculo de la deuda límite y el espacio fiscal

Finalmente, en la tercera etapa se calcula el límite de deuda y el espacio fiscal, mediante el uso de los parámetros estimados de las ecuaciones (15) y (16) y, además, empleando como intercepto el parámetro del efecto fijo país. El espacio fiscal estará dado por la diferencia entre el valor estimado de la deuda límite y el nivel de la deuda observada en el último año disponible.

## 4. Resultados

En el Cuadro 2 se muestra los resultados de la estimación de la función de reacción para el panel desbalanceado de 13 países con información anual para el período 1980-2016. En la columna (1) se tienen en cuenta todos los controles descritos en la sección 3.1, mientras que en la (2) se presentan los mismos resultados, luego de la eliminación de

los controles que no son significativos estadísticamente, algunos de ellos correlacionados. Se subraya que el componente correspondiente al *spline* es estadísticamente significativo y mantiene el signo (por lo menos uno de los coeficientes lo satisface), al igual que brechas del producto y del gasto, bajo las dos especificaciones. En el modelo (2) es evidente que, además de las brechas, la presencia de regla fiscal también es estadísticamente significativa y registra el signo esperado. Los parámetros estimados del modelo (2) son tomados en las siguientes etapas; es decir, para calcular el límite de la deuda y el espacio fiscal para Colombia y el resto de países de la muestra.

Antes de mostrar los resultados finales, es conveniente mencionar que el ajuste de los datos al comportamiento no lineal esperado de la función de reacción definida a través de la técnica de *spline*, es satisfactorio. En la Gráfica 2 se ilustra dicho ajuste al comparar el promedio observado del balance primario para los países de la muestra (puntos rojos ordenados por rangos de la deuda) y la función de reacción estimada (línea azul).

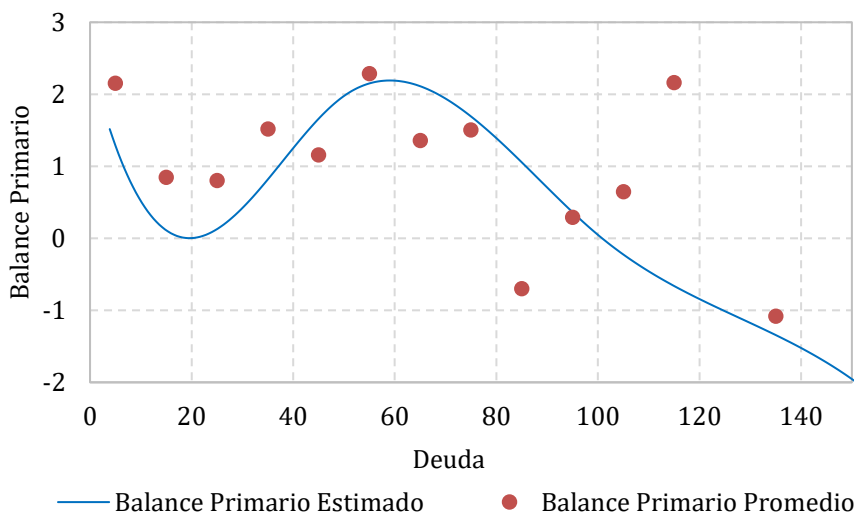
Cuadro 2. Estimación Spline de la Función de Reacción Fiscal  
Panel de 13 Países, Período 1980-2016

Var Dependiente: Balance Primario	(1)	(2)
Intercepto	-20.54***	-0.15
Coef. Spline 1	-3.88*	-3.29
Coef. Spline 2	1.61	2.92
Coef. Spline 3	-1.38	-2.26
Coef. Spline 4	-4.77	-2.96
Coef. Spline 5	-13.11**	-7.93•
Coef. Spline 6	-11.82***	-4.55
Brecha producto	0.42***	0.42***
Brecha gasto gobierno	-0.27***	-0.27***
Acuerdos con el FMI (Si = 1)	-0.98•	
Regla Fiscal (Sí=1)	1.88*	1.41*
Apertura Comercial	0.014	
Población dependiente actual	0.41***	
Inflación	-7.88•	

Niveles de Signif. '\*\*\*' 0.001, '\*\*' 0.01, '\*' 0.05, '•' 0.1, '' 1.

Fuente: Estimación de los autores

Gráfica 2. Relación Muestral del Balance Primario y la Deuda Bruta (%PIB)

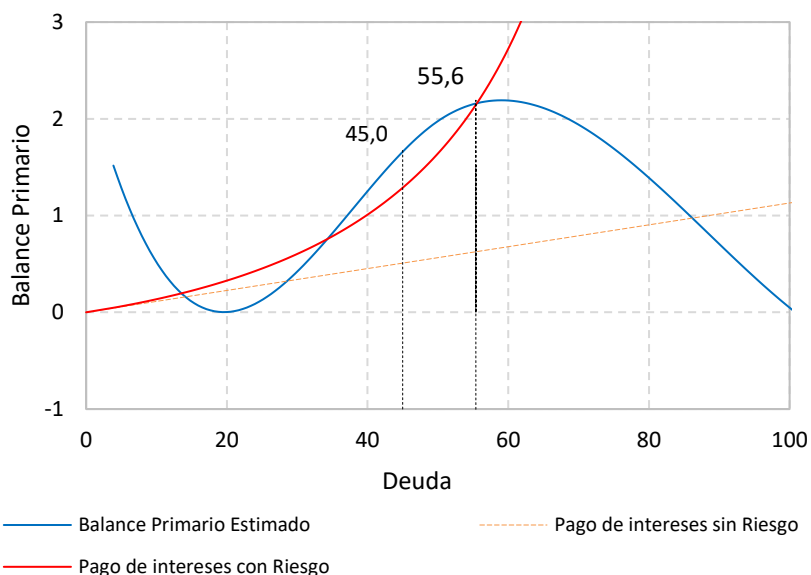


Fuente: Estimación de los autores

#### 4.1. Deuda Límite y Espacio Fiscal en Colombia

En la Gráfica 3 se resumen los resultados para Colombia. En el cálculo de la deuda límite se tiene en cuenta, por una parte, el diferencial de largo plazo entre la tasa de interés real de la deuda, con prima de riesgo, y el crecimiento económico per cápita y, por otra parte, los parámetros de la función estimada con el spline cúbico con el efecto fijo estimado para el país. Las estimaciones sugieren que el límite de la deuda pública consolidada de Colombia ( $\bar{b}$ , de la Gráfica 1) se situaría en 55,6% del PIB y que el espacio fiscal sería cercano a los 7 puntos del producto. Este último cálculo se obtiene al considerar que, a finales de 2017, la deuda bruta alcanzó el 49%. Es preciso advertir que, si bien el nivel actual de la deuda luce sostenible, el gobierno tendría un espacio fiscal bastante estrecho, que puede ser riesgoso, especialmente por la sensibilidad de este indicador a los cambios en las condiciones macroeconómicas. De aquí que sea necesario revertir la tendencia expansiva de la deuda registrada en los últimos años, para crear un espacio fiscal más holgado en el mediano plazo, a fin de preservar el acceso a los mercados de crédito. De la Gráfica también se infiere que el punto de inflexión de la función  $b^*$  está alrededor de 45% del PIB, lo que significa que, por encima de ese nivel, las calificadoras de riesgo podrían reaccionar aumentando las primas ante incrementos sucesivos de la deuda.

Gráfica 3. Aproximación a la deuda Límite y Espacio Fiscal para Colombia



Ahora bien. De la deuda pública colombiana registrada en 2017, el 94,3% fue emitida por el Gobierno Nacional Central, GNC. El resto corresponde en partes iguales a la deuda de los gobiernos territoriales y del resto del sector público. Si se aplicara esta participación del GNC a la deuda límite que se calcula en el ejercicio, se infiere que la deuda límite del GNC, estimada con este nuevo enfoque de la “fatiga fiscal”, sería de 52.4% del PIB. Por supuesto, de acuerdo al modelo utilizado, el GNC debe evitar niveles cercanos a esos límites, para que no incurrir en mayores primas de riesgo y mantener la credibilidad y el acceso a los mercados.

**Sensibilidad.** El Cuadro 3 presenta la sensibilidad del límite estimado para la deuda pública colombiana ante cambios en la prima de riesgo, siendo esta una de las variables exógenas de mayor relevancia para las finanzas del gobierno. El ejercicio consiste en estimar el límite de la deuda, con un aumento y una disminución de la prima de riesgo en 100 p.b., con respecto al valor de referencia de 2017. Nótese que el límite de la deuda pública podría aumentar en 2,3% del PIB (de 55,6% a 57,9%) en los “buenos tiempos”, cuando la prima de riesgo podría bajar hasta 100 puntos básicos, según se ha registrado en la historia de la última década, o reducirse en la misma cuantía hasta 53,3% del PIB en tiempos difíciles, cuando aumenta la prima en 100 p.b, como ocurrió en 2009, con la crisis financiera global.

Cuadro 3. Estimación del límite de la deuda pública y del espacio fiscal para distintos niveles de prima de riesgo – Colombia

	Escenarios alternativos de prima de riesgo <sup>a/</sup>		
	-100 p.b.	Escenario 2017	+100 p.b.
Prima de riesgo (p.b)	94	194	294
Límite de la deuda consolidada (% PIB)	57,9	55,6	53,3
Límite de la deuda del GNC (% PIB)	54,6	52,4	50,2
Espacio fiscal, Sector Público Consolidado (%PIB) <sup>b/</sup>	8,5	6,2	3,9

Notas: a/ Prima medida por el EMBI cuya información proviene de Bloomberg. La prima se mide en puntos básicos promedio anual, con base en su valor diario. b/El espacio fiscal se calcula como la diferencia entre la deuda límite y la deuda de 2017 que cerró en 49,4% del PIB.

Fuente: Estimaciones de los autores

## 4.2 Evidencia para los Otros Países de la Muestra

El Cuadro 4 muestra los cálculos del límite de deuda y el espacio fiscal para el resto de países de la muestra. En la primera columna se muestra el diferencial de largo plazo entre la tasa de interés real de la deuda, incluyendo la prima de riesgo, y el crecimiento económico per cápita para cada país. En la segunda el nivel de la deuda (como porcentaje del PIB) del último año disponible, en la tercera la prima de riesgo para 2017 y, finalmente en las columnas 4 y 5, se muestran las estimaciones del límite de la deuda y el espacio fiscal.

Nótese que Colombia se encuentra por debajo del nivel promedio de la región en materia de endeudamiento público (49,4% vs 61.1% del PIB, para finales de 2017). Por su parte Chile y Perú registran los niveles mucho más bajos (23.5% y 25,4%, respectivamente), al tiempo que Brasil tiene el nivel más alto (83,9%). En relación al espacio fiscal, Chile cuenta con un amplio margen, mientras que México y Ecuador, que registran endeudamientos relativamente cercanos a los de Colombia, disponen de menor espacio fiscal.

En el caso de Brasil, infortunadamente no se puede estimar la deuda límite, debido al alto *spread* entre la tasa de interés y la tasa de crecimiento de la economía,  $r - g$ , que no permite su intersección con la función de reacción. En términos de la Gráfica 1, la pendiente de la línea roja (*el spread*) resulta tan elevada que no logra su intersección

con la curva azul. En el otro extremo se encuentra Perú, con un *spread* negativo. En este caso, la línea roja tiene una pendiente negativa que impide su corte con la línea azul.

Cuadro 4. Estimaciones del Límite de la Deuda Pública y del Espacio Fiscal para los Países de la Muestra

País	Diferencial entre tasa de interés y crecimiento ( <i>r-g</i> ) (Porcentajes) (1)	Deuda 2017 (%PIB) (2)	Prima de Riesgo 2017 (p.b) (3)	Límite de deuda con prima de riesgo (%PIB) (4)	Espacio Fiscal (%PIB) (5 = 4-2)
Brasil	9.35	83.9	263	n.d	n.d
Chile	2.27	23.5	130	69.0	45.5
<b>Colombia</b>	<b>3.07</b>	<b>49.4</b>	<b>194</b>	<b>55.6</b>	<b>6.2</b>
Ecuador	2.49	44.9	621	46.4	1.5
México	0.63	54.1	256	59.5	5.4
Perú	-0.61	25.4	145	n.d	n.d
Australia	1.77	40.8	31	60.2	19.4
Bélgica	1.00	103.1	-161	135.9	32.8
Corea	-1.77	39.5	-5	191.1	151.6
Dinamarca	1.23	36.4	-185	62.3	25.9
Islandia	0.70	39.9	-11	79.9	40.0
Japón	-0.33	237.6	-236	n.d	n.d
Nueva Zelanda	2.22	26.4	66	74.6	48.2

1/ n.d: no disponible. 2/ La prima de riesgo para los países de AL se refiere al EMBI promedio anual. Para los demás países se calcula como la diferencia entre la tasa de los bonos a 10 años emitidos por cada país y los Bonos del Tesoro de Estados Unidos. Fuente: Bloomberg y FRED database.

Para el resto países, en el que se incluyen algunos emergentes y otras miembros de la OECD con altos niveles de deuda, se encuentra que en general, disponen de mayor espacio fiscal<sup>8</sup>. No obstante, dentro de ellas hay dos casos, Corea y Japón, con *spreads* negativos entre las tasas de interés y el crecimiento económico, como el caso peruano, que merecen una reflexión, puesto que no son los únicos que registran ese rasgo en el contexto internacional. El punto es que bajo el principio de sostenibilidad fiscal (y la estimación de la deuda límite), se requiere que el *spread* entre las variables sea positivo, para que la trayectoria de la deuda en el largo plazo sea dinámicamente estable (ecuación 8). Este *spread* positivo también se requiere para satisfacer la condición de

<sup>8</sup> Los países del grupo "Otras Economías", fueron evaluados en el trabajo original de Ghosh et. al. (2013), con información hasta 2007 para 23 economías avanzadas. El espacio fiscal encontrado para estos países fue mayor, porque no se capturaron los afectos de crisis del 2008. Allí también se presentó la limitación de no poder estimar el espacio fiscal para varios países, como el caso de Japón.

transversalidad y así evitar los llamados esquemas de juego *no-ponzi* (ecuación 6) De manera que cuando se presenta el caso de *spreads* negativos, como los que se está registrando en los años recientes, especialmente por la coyuntura de bajas tasas de interés a nivel internacional, la dinámica de la deuda torna inestable, lo cual en términos prácticos implica que los gobiernos podrían eventualmente tolerar mayores niveles de endeudamiento, por lo menos temporalmente (Blanchard y Summers, 2017).

## 5. Conclusiones

Puesto que la deuda pública no puede crecer de manera ilimitada sin que se llegue a situaciones de insolvencia y cesión de pagos, es sensato suponer que la deuda tiene un límite, más allá del cual un país podría entrar en situaciones de insostenibilidad fiscal. El límite debe ser entendido, por consiguiente, como un nivel indicativo, o de referencia, cuyo cálculo es valioso, al menos, por dos razones: Para evitar que los pasivos del gobierno se acerquen a ese nivel crítico y para conocer el posible espacio fiscal disponible para la autoridad fiscal. La medición del espacio fiscal debe ser tomada con precaución, por la sensibilidad de la deuda a choques en el entorno macroeconómico.

En este artículo se estimó el límite de la deuda pública y el espacio fiscal para Colombia y otras economías emergentes de la región, bajo el enfoque de la *fatiga fiscal* propuesto por Ghosh et. al., en 2013. De acuerdo con esta prescripción teórica, un país podría presentar esos síntomas cuando, ante incrementos sucesivos de la deuda y del pago de los intereses, los esfuerzos de un gobierno para mantener sendas positivas y crecientes del balance primario se deterioran, de manera que sufre un estado de fatiga que conduce su endeudamiento a un límite.

Los cálculos se desarrollaron en tres etapas. En la primera se estimó la función de reacción del gobierno a la dinámica de la deuda, mediante una técnica que resulta adecuada para los mercados emergentes (los *splines*). Conviene precisar que, para estas economías, la información fiscal estandarizada no es muy amplia, tanto en el horizonte temporal como en el número de países. Así las cosas, al tratar de estimar la función cúbica originalmente utilizada Ghosh et. al. para las economías avanzadas, con los datos de las economías emergentes, se encontró que el ajuste a los datos no era el adecuado. Por ese motivo se seleccionó una técnica de estimación alternativa (*splines cúbico*). La reacción fiscal del gobierno ante la deuda está influida por otras variables (usadas como controles), tales como la brecha del producto, la brecha del gasto público en consumo, la apertura comercial, la inflación, la existencia de una regla fiscal o de acuerdos con el FMI y la dependencia poblacional.

En las segunda y tercera etapas se estimó, por una parte, el *spread* entre la tasa de interés real de la deuda pública y el crecimiento económico per cápita de cada país de la muestra y, por otra, se utilizaron los parámetros estimados de la función de reacción y el efecto fijo de país del panel, para encontrar los resultados. Se subraya que en este trabajo se endogeniza la prima de riesgo país a la evolución de la deuda, para capturar la confianza de los mercados en la capacidad que tienen las economías emergentes para cumplir con sus obligaciones.

En relación a los datos, se utilizó información de un panel desbalanceado de trece economías para el periodo 1980–2016. La muestra incluye seis países de América Latina, para conformar un grupo de referencia más afín a Colombia. Se incluyeron además algunas economías emergentes y avanzadas de la OECD con niveles distintos de deuda, para darle mayor varianza a los datos. Para mantener coherencia de la información entre los países, se utilizó las bases de datos del WEO 2018 (World Economic Outlook) y del IFS 2018 (International Financial Statistics), del FMI. La información fiscal corresponde al gobierno general, es decir, que se incluyen las operaciones de los gobiernos central, estatales y locales.

Los resultados sugieren que el límite de la deuda pública consolidada de Colombia se situaría en 55,6% del PIB y que el espacio fiscal ascendería a 7 puntos porcentuales del producto, aproximadamente. El espacio de 7 puntos porcentuales es estrecho, especialmente por la sensibilidad de este indicador a los choques externos. De los resultados también se infiere que el punto de inflexión de la función de reacción está alrededor de 45% del PIB, lo que significa que, por encima de ese nivel, las calificadoras podrían reaccionar aumentando a mayor ritmo la prima de riesgo. Ahora bien, del total de la deuda pública colombiana registrada en 2017 (último dato disponible), el 94% fue emitida por el GNC. Si se aplicara esa participación del GNC a los resultados del ejercicio, se infiere que la deuda límite del GNC, estimada con el enfoque de la “fatiga fiscal”, sería de 52.4% del PIB.

La prima de riesgo soberano es uno de los parámetros clave para el análisis del límite fiscal, al capturar, entre otros, la percepción de los mercados sobre el futuro de las finanzas públicas. Al evaluar la sensibilidad del límite de la deuda ante aumentos y disminuciones de la prima de riesgo en 100 p.b., con respecto al valor de referencia de 2017, se encontró que el límite aumenta en 2,3% del PIB (pasando de 55,6% a 57,9%) en los “buenos tiempos”, cuando la prima de riesgo podría bajar hasta 100 puntos básicos, según se ha registrado en la historia de la última década. O, por el contrario, reducirse en la misma cuantía hasta 53,3% del PIB en tiempos difíciles, cuando aumenta la prima en 100 p.b, como ocurrió en 2009, con la crisis financiera global.

En el contexto regional, los resultados indican que Chile es el país con mayor espacio fiscal, dado su bajo endeudamiento y su relativo buen desempeño macro, reflejado en el diferencial entre tasa de interés y el crecimiento per cápita. Otros países de la región como México y Ecuador, que registran endeudamientos cercanos a los de Colombia, parecen disponer de menor espacio fiscal. Para Brasil y Perú, infortunadamente no se puede estimar la deuda límite, debido, en el primer caso, al alto *spread* entre la tasa de interés y la tasa de crecimiento de la economía. En el segundo caso, el *spread* es negativo, lo cual tiene las mismas implicaciones que impiden el cálculo del límite. El caso de *spreads* negativos, como los que se está registrando en los años recientes especialmente en las economías avanzadas, por la coyuntura de bajas tasas de interés a nivel internacional, plantea una inquietud teórica muy relevante, puesto que la dinámica de la deuda se tornaría inestable. Sin embargo, en términos prácticos implica que, de manera temporal, los gobiernos eventualmente podrían tolerar mayores niveles de endeudamiento.

## Referencias

- Abiad, A. and Ostry, J.D. (2005). Primary surpluses and sustainable debt levels in emerging market countries, Policy Discussion Paper No. 05/6, International Monetary Fund.
- Arenas de Mesa, A. (2016). Sostenibilidad fiscal y reformas tributarias en América Latina.
- Banco Mundial (2018), "Ajuste fiscal en américa latina y el caribe: ¿costos en el corto plazo, beneficios en el largo?". Informe Semestral.
- Barnhill, T., y Kopits, G. (2003). Assessing fiscal sustainability under uncertainty.
- Beck, N. y Katz J. (1995). "What to do (and not to do) with time-series cross-section data." *Am. Polit. Sci. Rev.* 89:634-47.
- Bohn, H. (1991). Budget balance through revenue or spending adjustments?: Some historical evidence for the United States. *Journal of monetary economics*, 27(3), 333-359.
- Bohn, H. (1998). The Behavior of U.S. Public Debt and Deficits. *The Quarterly Journal of Economics*, 113 (3), 949-963.
- Bohn, H. (2008). The sustainability of fiscal policy in the United States, in (R. Neck and J.E. Sturm, eds.), *Sustainability of Public Debt*, pp. 15–49. Cambridge, MA: MIT Press.
- Burnside, C. (Ed.). (2005). *Fiscal sustainability in theory and practice: a handbook*. The World Bank.
- De Boor, C. (2001). *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences # 27. Springer. New York
- Ghosh, A., Kim J., Mendoza E., Ostry J., y Qureshi M. (2013) Fiscal Fatigue, Fiscal Space and Debt Sustainability in Advanced Economies. *The Economic Journal* (Royal Economic Society) (0), 4-30.
- Greene, W., (2012). *Econometric Analysis*. 7ed. Prentice Hall.
- IMF (2018). *World Economic Outlook: Abril 2018*, Washington, DC: International Monetary Fund.

IMF (2018). International Financial Statistics: Abril 2018, Washington, DC: International Monetary Fund.

Judge, G., William E., Carter H., Lütkepohl H., y Lee T. (1985). The Theory and Practice of Econometrics. 2ed. John Wiley y Sons.

Julio, J., Mera S., y Revéz A. (2002): “La Curva Spot (cero cupón), estimación con Splines cúbicos suavizados, usos y ejemplos,” Borradores de Economía 213, Banco de la República de Colombia.

Lozano I, (2019). La política fiscal y la estabilización macroeconómica en Colombia. En Ensayos Sobre Política Económica, Banco de la República, N°90, (Coordinador)

Ministerio de Hacienda y Crédito Público. Marcos Fiscales de Mediano Plazo., Varias vigencias [www.minhacienda.gov.co](http://www.minhacienda.gov.co)

Martner, R. y Tromben, V. (2004), “La sostenibilidad de la deuda, el efecto bola de nieve y el pecado original”, Serie Gestión Pública 46, Instituto Latinoamericano y del Caribe de Planificación Económica y Social (ILPES), Santiago de Chile, junio.

Paret, A. C. (2017). Debt sustainability in emerging market countries: Some policy guidelines from a fan-chart approach. Economic Modelling, 63, 26-45.

Prais, S., y Winsten C. (1954). Trend Estimation and Serial Correlation. Cowles Commission Discussion Paper No. 383, Chicago.

Trehan, B. y Walsh, C.E. (1991) Testing Intertemporal Budget Constraints: Theory and Applications to U.S. Federal Budget and Current Account Deficits. Journal of Money, Credit and Banking, 23, 206-223.

## Apéndice 1. Determinación Splines

La idea de construir un spline es hallar una aproximación al comportamiento de una función  $h$ , de la cual sólo se conoce un conjunto de puntos. En este caso, esos puntos corresponden a los niveles de deuda a PIB de la muestra ( $b$ ). Sin embargo, los splines pueden construirse de cualquier grado, mejorando la aproximación a la función desconocida entre más alto sea el mismo. Así, se toma como referencia el trabajo realizado por Ghosh et al (2013), y se aplica un spline cúbico.

Los splines cúbicos son un conjunto de polinomios, construidos en intervalos del dominio, que buscan aproximarse a la función propia de los datos observados. Los intervalos están delimitados por nodos  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ , que en este caso corresponden al punto mínimo y máximo de la deuda a PIB, más tres nodos intermedios. Por su parte, el polinomio perteneciente a cada uno de los  $k - 1$  intervalos, se define como:

$$P_\tau(b) = c_{1,\tau} + c_{2,\tau}b + c_{3,\tau}b^2 + c_{4,\tau}b^3 \quad \text{con} \quad \pi_\tau \leq b < \pi_{\tau+1} \quad (\text{A.1})$$

Y están sujetos a las siguientes restricciones:

$$P_{\tau-1}(b) = P_\tau(b) \leftarrow c_{1,\tau-1} + c_{2,\tau-1}b + c_{3,\tau-1}b^2 + c_{4,\tau-1}b^3 = c_{1,\tau} + c_{2,\tau}b + c_{3,\tau}b^2 + c_{4,\tau}b^3$$

$$P'_{\tau-1}(b) = P'_i(b) \leftarrow c_{2,\tau-1} + 2c_{3,\tau-1}b + 3c_{4,\tau-1}b^2 = c_{2,\tau} + 2c_{3,\tau}b + 3c_{4,\tau}b^2$$

$$P''_{\tau-1}(b) = P''_\tau(b) \leftarrow 2c_{3,\tau-1} + 6c_{4,\tau-1}b = 2c_{3,\tau} + 6c_{4,\tau}b$$

$$c_{3,0} = c_{4,0} = c_{3,n} = c_{4,n} = 0$$

Donde las tres primeras restricciones aseguran que tanto la función, como su primera y segunda derivada son continuas en los nodos. Esto permite que se construya una función continua, para aproximarse a  $h$ , luego de empalmar los polinomios en cada uno de los nodos. La última restricción, asegura que el spline cúbico sea lineal en los puntos inicial y final, dado que los coeficientes correspondientes a los términos cuadrático y cúbico son iguales a cero.

Una característica llamativa del spline cúbico, es que tiene la propiedad de ser una función que minimiza la integral de la segunda derivada al cuadrado,  $\int_{\pi_0}^{\pi_k} (f''(b))^2 dt$ . Este término se puede interpretar como una penalización por rugosidad de la función, donde las curvas que cambian lenta o suavemente presentan un valor pequeño de la integral. Por ejemplo, en una función lineal, la integral de la segunda derivada al cuadrado es igual a cero.

Cabe resaltar que la adición de un nodo, aumenta la dimensionalidad del espacio de parámetros en una unidad, ya que tres de los cuatro parámetros están restringidos. De igual forma, al incrementar el número de nodos, los *splines* toman formas funcionales cada vez más flexibles, lo cual muestra la relación entre el grado de aproximación que se logra con el spline y el número de nodos que lo definen.

Una manera eficiente y numéricamente estable para generar los *splines* necesarios para la aproximación, es a través de las bases de B-splines cúbicos. Con esto, se refiere a un vector de  $\zeta = k + 1$  (sin intercepto) splines cúbicos definidos sobre el dominio. Específicamente, un B-spline se define a partir de la siguiente recursión, donde  $r = 4$  para un spline cúbico y  $1 \leq k \leq \zeta$

$$\Phi_k^r(b) = \frac{\Phi_k^{r-1}(b)(b-\pi_k)}{\pi_{k+r-1}-\pi_k} + \frac{\Phi_{k+1}^{r-1}(b)(\pi_{k+r}-b)}{\pi_{k+r}-\pi_{k+1}} \quad (\text{A.2})$$

con  $b \in [0, \max(b)]$ , y  $\pi_k$  es cada uno de los nodos propuestos. En esta recursión, se tiene que el término es cero si el denominador es cero. Este método es conocido como el algoritmo Cox-De Boor. Además,

$$\Phi_k^1(b) = \begin{cases} 1, & \pi_k \leq b < \pi_{k+1} \\ 0, & \text{E. O. C} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Para simplificar la notación, se tiene que  $\Phi_k^4(b) = \Phi_k(b)$ . Entonces, la base de un B-spline es el vector columna de tamaño

$$\varphi(b) = (\Phi_1(b), \Phi_2(b), \dots, \Phi_\zeta(b)) \quad (\text{A.3})$$

donde para el presente trabajo  $\zeta = 6$ . Finalmente, cualquier spline cúbico se puede construir a partir de combinaciones lineales de los B-splines, de la forma  $\beta\varphi(b)$ , donde  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\zeta)^T$  es un vector de coeficientes.

## Apéndice B. Estimación Función de Reacción Fiscal Tipo Cúbica

Como ejercicio de comparación, se realiza la estimación siguiendo la metodología de Ghosh et al. (2013), aplicada a la muestra definida en el presente documento. En ese orden, la función de reacción fiscal del balance primario a la deuda (como razones del PIB) se define como:

$$s_t = \mu_t + f(b_{t-1}) \quad (A.1)$$

donde  $\mu$  agrupa los controles utilizados. En un ambiente panel  $i$  se refiere al país y  $t$  al periodo. Entonces:

$$f(b_{it}) = b_{i,t} + b_{i,t}^2 + b_{i,t}^3 \quad (A.1)$$

El Cuadro A.1 muestra la regresión con todos los controles (1) y solo incluyendo como controles la brecha del producto y la del gasto del gobierno (2). En la primera se observa que los tres componentes del esquema cúbico de la deuda al balance primario son significativos, al igual que las brechas, pero los demás controles no lo son. En la segunda, únicamente el componente lineal y las brechas aparecen significativo.

Cuadro A.1. Estimación Cúbica Función de Reacción Fiscal - 13 Países  
1980-2015

Var Dependiente: Balance Primario	(1)	(2)
Deuda	-0.153*	-0.045•
Deuda cuadrada	0.002*	0.001
Deuda cúbica	-6.6e-06*	-3.04e-06
Brecha producto	0.453***	0.469***
Brecha gasto gobierno	-0.354***	-0.341***
Apertura Comercial	-0.008	
Población dependiente actual	0.059	
Inflación	-3.006	
Acuerdos con el FMI (Si = 1)	-0.826	
Regla Fiscal	0.731	

Códigos de Signif. '\*\*\*' 0.001, '\*\*' 0.01, '\*' 0.05, '•' 0.1, ' ' 1.

Fuente: Estimación de los autores

La Gráfica A.1 expone la estimación con los parámetros de (1), frente a los datos observados, los cuales se calculan como promedios simples de la deuda por rangos. Se evidencia que no se realiza un buen ajuste, lo cual se debe a que i) Las dinámicas de los países emergentes difieren ampliamente de aquellas propias de economías avanzadas. Este último grupo posee mayor credibilidad frente a los mercados, lo cual amplía el

rango de deuda al que se presenta fatiga fiscal, y ii) Las restricciones propias de la función cúbica impiden que, a niveles bajos de deuda, la estimación se ciña a los datos.

Gráfica A.1. Balance Primario y Deuda Pública (%PIB) - 13 países

