



REPORTE DE ESTABILIDAD FINANCIERA

Marzo de 2012

¿Cómo caracterizar entidades
sistémicas?: Medidas de Impacto
Sistémico para Colombia

Mariana Laverde
Javier Gutiérrez Rueda

¿Cómo caracterizar entidades sistémicas?: Medidas de Impacto Sistémico para Colombia*

MARIANA LAVERDE*
JAVIER GUTIÉRREZ RUEDA**

Resumen

Este trabajo hace una contribución a la caracterización de las entidades sistémicas así como las vías mediante las cuales este riesgo se presenta en el sistema. Inicialmente, siguiendo la metodología propuesta por Zhou (2010), se estiman y analizan indicadores de riesgo sistémico para los establecimientos de crédito en Colombia y se estudia cuál es la relación de estas medidas con el tamaño de las entidades en el sistema y el nivel de interconexión en el mercado interbancario. Finalmente se realiza un ejercicio de estrés y se analiza el efecto del mismo en los indicadores de importancia sistémica calculados.

Clasificación JEL: *G18, E58, L51*

Palabras clave: Estabilidad Financiera, Riesgo Sistémico, Teoría del Valor extremo, Ejercicio de estrés.

*Los autores agradecen los valiosos comentarios de Juan Carlos Mendoza, Dairo Estrada y Miguel Morales. Las opiniones contenidas en este documento son exclusivas de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a su Junta Directiva. Los autores son responsables de los errores que persistan. Este documento es una extensión del trabajo del mismo nombre presentado como tesis de maestría en economía en la Universidad de los Andes.

*Profesional, Departamento de Estabilidad Financiera. E-mail: mlaverqu@banrep.gov.co

**Profesional especializado, Departamento de Estabilidad Financiera. E-mail: jgutieru@banrep.gov.co

1. Introducción

Tras la crisis financiera del año 2008 y las acciones de rescate tomadas por el gobierno estadounidense ha resurgido la controversia, entre académicos y hacedores de política, en cuanto a la estrategia óptima que debe seguir un gobierno para garantizar la estabilidad financiera y a la vez incentivar la disciplina de mercado, cuando una entidad o un grupo de entidades se encuentran en una situación de estrés.

Los gobiernos deben garantizar, entre otras cosas, la estabilidad económica y velar por el bienestar de la sociedad. El sector financiero es un ente privado que tiene gran influencia en estas últimas. En este orden de ideas, los gobiernos deben asegurarse de que este sector actúe como un dinamizador de la economía al tiempo que velan por los recursos públicos y privados que administra.

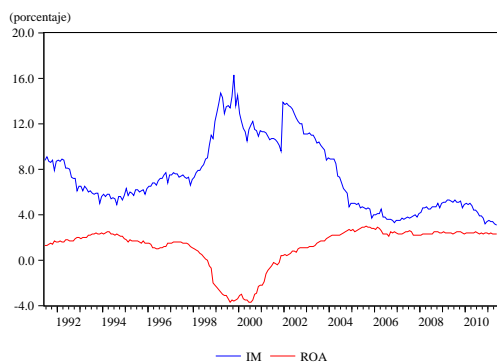
En el caso en que una entidad o un grupo de entidades estén en un escenario de estrés, el gobierno debe actuar de forma que la repercusión de esta situación en el resto del sistema se minimice. En este sentido, recientemente la regulación financiera se ha concentrado en identificar entidades sistémicamente importantes o SIFI (*Systemic Important Financial Institutions*) con el objetivo de diseñar regulación macroprudencial que incorpore consideraciones de riesgo sistémico (Herring (2011)). A pesar de que en la teoría el concepto de lo que las SIFI son está claro, no hay un consenso en cuanto a su definición y mucho menos en cuanto a la forma en que se identifican estas entidades. En este trabajo diremos que una SIFI es una entidad cuya insolvencia tendría repercusiones importantes para el buen funcionamiento del resto del sistema financiero. En este sentido, cuando se hable de riesgo sistémico, se refiere al riesgo de que la insolvencia de alguna entidad desencadene un colapso del sistema financiero.

Usualmente, se ha hablado de que las entidades sistémicamente importantes son las entidades más grandes (*too big to fail*) o las más interconectadas (*too interconnected to fail*, Bernanke (2009)). Sin embargo, algunos trabajos también han mostrado que la importancia sistémica no está necesariamente asociada con estas características; en particular, Zhou (2010) concluye que, para una muestra de 28 bancos estadounidenses, el tamaño no está asociado con la importancia sistémica. Lo anterior resalta la relevancia de encontrar medidas de importancia sistémica que sustenten acciones de rescate en escenarios de estrés y; en términos de regulación macroprudencial, den luces acerca de entidades que deban ser monitoreadas con especial cuidado. El objetivo de este trabajo es precisamente hacer un acercamiento a este punto. Se pretende estimar medidas de riesgo sistémico y adicionalmente identificar si estas medidas tienen o no relación con variables de tamaño e interconexión.

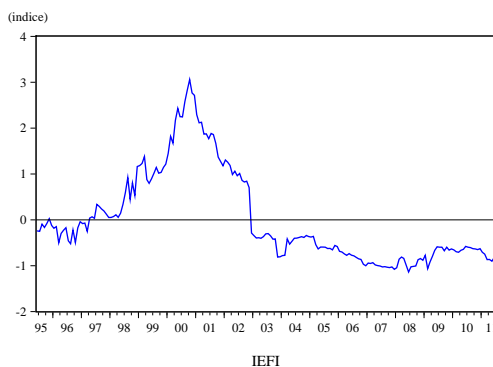
Para analizar con rigor qué significa que una entidad sea sistémica es necesario empezar por preguntarse, en términos prácticos, qué es un escenario de inestabilidad financiera. A pesar de que las crisis financieras se manifiestan de formas diferentes, la literatura ha identificado que los períodos de inestabilidad se caracterizan por niveles bajos de rentabilidad de las entidades financieras, junto con aumentos en los indicadores de morosidad de los establecimientos de crédito (Tsomocos (2003)). En mercados financieros desarrollados esto se traduce en caídas en el valor del *equity* de estos.

Durante la crisis de finales de los noventa en Colombia, se encuentra que efectivamente el indicador de mora (IM) -medido como la razón entre cartera vencida y cartera bruta- aumentó, al tiempo que la rentabilidad de los establecimientos de crédito cayó a niveles negativos. El Índice de Estabilidad Financiera (IEFI) construido por Morales & Estrada (2010), utilizando variables de liquidez, rentabilidad y morosidad, entre otras, captura el desempeño del sistema. Entre los años 1998 y 2002, este indicador tomó valores positivos e históricamente altos, lo que muestra niveles de estrés del sistema altos en relación a su historia (Gráfico 1).

GRÁFICO 1: Evolución del IM, el ROA y el IEFI de los establecimientos de crédito en Colombia



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos Banco de la República.



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, Morales & Estrada (2010), cálculos de los autores.

Teniendo esto en mente, para identificar la importancia sistémica de una entidad, se modelará la distribución conjunta de variables de estabilidad financiera de las entidades. En particular, las colas de las distribuciones de estas variables, entendiendo que una crisis está caracterizada por valores extremos de estos indicadores. Si bien la importancia sistémica de una entidad se definió en términos de la repercusión de su insolvencia sobre el resto del sistema, en este trabajo aproximaremos la insolvencia de una entidad con los valores extremos de sus indicadores de estabilidad financiera. Esto se hace por dos razones, primero no tenemos suficientes observaciones de escenarios de insolvencia, y mucho menos de las entidades que hoy en día operan; y segundo, utilizar medidas de inestabilidad, en lugar de insolvencia, resulta informativo pues se espera que las primeras precedan a las segundas y en este sentido actúen como alarmas.

En la práctica, se habla de dos vías de contagio entre entidades financieras, la primera es el mercado interbancario donde las entidades financieras suplen sus necesidades de liquidez entre ellas. El segundo, posiciones similares en activos riesgosos, bien sean títulos de inversión o cartera.

Márquez & Serafín-Martínez (2009) utiliza un modelo de redes con el cual se calcula la función de pérdidas del sistema financiero ante un choque que genere contagio. Para esto modelan la dinámica del contagio de manera discreta y cuantifican las pérdidas que se generarían utilizando las probabilidades conjuntas de *default* de los bancos mexicanos. Los autores encuentran que la fragilidad del sistema está determinada por la probabilidad de *default* de los bancos y por las entidades que están sobre expuestas en la red. Adicionalmente, encuentran que el sistema financiero es más sensible a las probabilidades de *default* que a la estructura del mercado.

Con el objetivo de cuantificar el riesgo sistémico, Adrian & Brunnermeier (2011) propusieron el valor en riesgo condicional (CoVaR). Mediante esta metodología se estima cómo el estrés financiero de alguna entidad puede aumentar el riesgo para otra. Es una medida de probabilidad condicional entre dos instituciones. La crítica a esta metodología es que solo permite ver relaciones bilaterales, y como dice Zhou: “*la complejidad del sistema financiero es de orden superior*”¹. Para modelar la interacción de una entidad con el sistema financiero utilizando la metodología del CoVaR, es necesario encontrar algún indicador que agregue el comportamiento del sistema y analizar el riesgo condicional entre una entidad y el resto del sistema. Para el caso colombiano, Arias et al. (2010) utiliza esta metodología para cuantificar el riesgo sistémico entendido desde la óptica del riesgo de mercado. Para el desarrollo de este trabajo se calcularon

¹Zhou, 2010, pg 207. Traducción propia

las contribuciones por entidad a este riesgo y se encontró que en los períodos de estrés se incrementan las correlaciones entre entidades.

Por otro lado, Segoviano & Goodhart (2009) propusieron una metodología mediante la cual identificaron los períodos de estrés de una entidad como aquellos donde las primas de los *Credit Default Swaps* (CDS) tomaban valores muy altos, en base a esto, utilizando un método no paramétrico² se estimó la función de probabilidad conjunta de estos eventos. Finalmente, se estimaron dos medidas de impacto sistémico, el *PAO*, que es la *probabilidad de que al menos alguna entidad entre en una situación de estrés* dado que exista otra fija en esta situación, y el índice de estabilidad del sector bancario, *BSI*, que mide el número esperado de bancos que estarían en una situación de estrés dado que existe alguno que lo está³.

La medida *PAO* cuantifica la probabilidad de que alguna entidad tenga un impacto sistémico, sin embargo no captura la severidad del impacto. De acuerdo con estimaciones hechas más adelante por Zhou, esta medida es cercana a uno para casi todas las entidades pues es probable que cada entidad esté interconectada con al menos otra del sistema (Zhou (2010)). En un ejemplo sencillo, suponga un sistema financiero con seis bancos que están organizados en dos *clusters* de acuerdo a las relaciones bancarias del sistema. Uno de los *clusters*, el A, con dos entidades y el B con cuatro; si se estima la medida *PAO* para algún banco en cada uno de los grupos se encontrará que esta medida es cercana a uno para los dos, sin embargo no se captura que la insolvencia de una entidad en el grupo B causará un mayor impacto sistémico en términos de severidad.

Por lo anterior, Zhou (2010), amplía la medida *BSI* : propone y estima el *índice de impacto sistémico (SII)* que mide la severidad que tiene sobre el sistema la quiebra de alguna entidad. Es decir, el número esperado de bancos que entraría en una situación de estrés dado que existe otro, fijo, que lo está. Adicionalmente, Zhou propone estimar el *índice de vulnerabilidad (VI)* que es la contraparte del *PAO*: mide la probabilidad de que alguna entidad fija entre en un escenario de estrés dado que existía otra en esta situación. Si se quiere medir el riesgo sistémico tal como fue definido, las tres medidas estimadas por Zhou son las más intuitivas pues capturan la esencia de la definición. Una de las grandes ventajas de lo propuesto por éste es la sencillez, no solo en cuanto a los indicadores que define sino además a la forma de estimarlos.

Chen Zhou, define estas medidas y logra resultados teóricos interesantes en cuanto a la relación de estos indicadores, y más adelante plantea una metodología, basada en teoría del valor extremo, que permite estimar los indicadores antes mencionados. Finalmente, Zhou muestra que para una muestra de 28 bancos que operan en Estados Unidos, las medidas de riesgo sistémico planteadas no están necesariamente correlacionadas con medidas de tamaño de las entidades. Las estimaciones hechas por Zhou utilizaron los retornos del equity como medida del desempeño financiero.

Para el desarrollo de este trabajo se tomó la metodología planteada por Zhou para estimar las tres medidas de impacto sistémico de las que se ha hablado: *PAO*, *VI* y *SII*, para los bancos y compañías de financiamiento (CF) en Colombia. Se utilizó el IEFI para medir el desempeño de las entidades de acuerdo con la definición de estabilidad financiera. Al igual que Zhou, se realizó el análisis de correlación entre las medidas de riesgo sistémico calculadas y variables de tamaño; adicionalmente se calcularon medidas de

²Mediante la metodología CIMDO (Consistent Information Multivariate Density Optimizing) se estima la cópula de las variables y con esta, la distribución conjunta de las mismas. La metodología consiste en una maximización sujeto a ciertas restricciones y partiendo de una distribución paramétrica inicial. Los detalles de esta metodología pueden consultarse en Segoviano, 2006

³Esta medida fue inicialmente propuesta por Huang (1992)

centralidad de los agentes en el mercado interbancario con el fin de identificar si existe una correlación positiva y significativa entre estas medidas y los indicadores de impacto sistémico estimados.

Se encontró que las medidas PAO y VI no están correlacionadas con variables de tamaño. Sin embargo, el índice de impacto sistémico (SII) sí mostró, en algunas estimaciones, tener una correlación positiva con variables de tamaño. Al realizar el mismo ejercicio con variables de centralidad en el mercado interbancario, no se encontró evidencia estadística que muestre que existe una relación entre la interconexión de las entidades en este mercado y los indicadores de importancia sistémica calculados.

El resto de este documento se organiza de la siguiente manera, en la Sección 2 se expone la metodología que se empleará para el cálculo de los indicadores de importancia sistémica, en la Sección 3 se hace un análisis de los datos que se emplean para calcular los indicadores de importancia sistémica y los que se utilizaron para construir indicadores de tamaño y centralidad. Finalmente en las Secciones 4 y 5 se muestran los resultados de los ejercicios y las conclusiones.

2. Metodología

2.1. Estrategia Teórica

El primer objetivo de este trabajo es estimar las medidas de riesgo sistémico propuestas por Segoviano-Goodhart y Chen Zhou. Formalmente, las medidas se definen en términos de escenarios de estrés financiero de una entidad, por esto es importante empezar por definir qué significa que una entidad esté en un escenario de estrés. Considere entonces la variable X_i asociada a la entidad i y suponga que valores muy altos de esta variable indican que la entidad está en dificultades financieras. En términos prácticos, esta debe ser una variable observable, que capture la solidez de una entidad.

Para identificar cuando una entidad está en estrés, es necesario y suficiente definir un umbral para X_i . Utilizando la metodología de valor en riesgo (VaR), diremos que una entidad está en crisis siempre que $X_i > VaR_i(p)$ para un nivel de p suficientemente pequeño. Donde $VaR_i(p)$ satisface que

$$P(X_i > VaR_i(p)) = p. \quad (1)$$

Es decir, $VaR_i(p)$ es el umbral que determina cuándo una entidad está en un escenario de estrés y es suficiente determinar un nivel de p para fijar dicho umbral; donde p , tiene una interpretación muy sencilla, es la probabilidad de que la entidad i esté en estrés. Es importante tener en cuenta que asumiremos que p será un valor constante para todas las entidades, es decir, para todas, la probabilidad de estar en crisis será la misma lo que no implica que $VaR_i(p)$ sea igual entre ellas.

Con esta definición en mente, es posible escribir formalmente los indicadores de riesgo sistémico que fueron descritos en la sección 1. El indicador $PAO_i(p)$ mide la probabilidad de que alguna entidad entre en estrés dado que la entidad i lo está. Formalmente,

$$PAO_i(p) \doteq P\{\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p) \mid X_i > VaR_i(p)\}. \quad (2)$$

De forma similar, el indicador $VI_i(p)$, que mide la probabilidad de que la entidad i entre en estrés dado que existe otra en esta situación, se define matemáticamente como

$$VI_i(p) \doteq P\{X_i > VaR_i(p) \mid \exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p)\}. \quad (3)$$

Finalmente, si suponemos un sistema bancario con d entidades financieras, el *índice de impacto sistémico*, $SII_i(p)$ es

$$SII_i(p) \doteq E \left(\sum_{j=1}^d 1_{X_j > VaR_j(p)} \mid X_i > VaR_i(p) \right), \quad (4)$$

donde 1_A es la función indicador que toma el valor de 1 siempre que A se cumpla y cero de lo contrario. Es decir, $SII_i(p)$ mide el número esperados de bancos en estrés dado que i lo está.

En este trabajo, se utilizará el IEFI como medida de desempeño financiero por considerar que reúne la evolución de las entidades en varios frentes (riesgo de credito, liquidez, rentabilidad, etc). A pesar de que trabajos anteriores han utilizado información de mercado como los retornos del *equity* o las primas de los CDS para definir los indicadores, en este trabajo no se utiliza esta información porque no se dispone de ella, en el caso de los CDS; y en cuanto a los retornos del *equity* se cuenta con información de pocas entidades.

Los indicadores de riesgo sistémico se definieron con base en la dependencia de las variables X_k , en particular la dependencia en las colas de las distribuciones de éstas, para $k = 1, \dots, d$. El enfoque más natural para estimar estos indicadores es el uso de la teoría del valor extremo multivariada. En el marco de esta teoría y con el fin de modelar los co-movimientos de las variables X_k en los extremos, Chen Zhou propone usar la siguiente función,

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_d) \doteq \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P(X_1 > VaR_1(x_1 p) \text{ o } \dots \text{ o } X_d > VaR_d(x_d p))}{p}. \quad (5)$$

En particular note que,

$$\mathcal{L}(1, \dots, 1) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P(X_1 > VaR_1(p) \text{ o } \dots \text{ o } X_d > VaR_d(p))}{p}. \quad (6)$$

Dado que p tiende a cero, la función $\mathcal{L}(1, \dots, 1)$ es la probabilidad de que alguna entidad esté en estrés ponderado por la probabilidad de la cola p . Esta función será muy importante en la estimación de los indicadores de riesgo sistémico pues, como se mostrará, es posible escribir todos estos en términos la función 5, esto ocurre pues, la función \mathcal{L} tiene toda la información de la dependencia en las colas de las variables X_k .

En teoría del valor extremo, las copulas son los objetos matemáticos que se utilizan usualmente para modelar la dependencia entre variables. Si $F(x_1, \dots, x_d)$ es la función de distribución conjunta de las variables aleatorias X_1, \dots, X_d y $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ son las funciones de distribución marginales (uniformes). Entonces existe una función $C(x_1, \dots, x_d)$ definida en $[0, 1]^d$ tal que satisface que

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (7)$$

esta función C es la copula de las variables X_1, \dots, X_d . La ecuación 7 muestra como se descompone la distribución conjunta, F , en términos de la información marginal (las funciones F_k) y la copula, que

recoge la dependencia entre las variables. La copula contiene más información de la que recoge la función \mathcal{L} , pues esta última solo captura la dependencia de las variables en los extremos, mientras que la cópula lo hace en todo el rango de las mismas. En consecuencia, en los extremos, la función \mathcal{L} es tan informativa como lo es la copula; lo que se resume en la siguiente proposición tomada de Zhou (2010).

Proposición 1. Sean x_1, \dots, x_d números reales positivos y sea $0 < p < 1$. Entonces,

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_d) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - C(1 - px_1, \dots, 1 - px_d)}{p} \quad (8)$$

La demostración de esta proposición está en el Apéndice Apéndice A.

El resultado anterior simplemente muestra que la función \mathcal{L} es tan informativa como la copula en la cola. Dado que queremos estimar la dependencia de las variables en los extremos, es suficiente estimar la función \mathcal{L} . Adicionalmente, la copula contiene información de la dependencia de las variables en todo su rango por lo que puede arrojar resultados mal especificados si lo que se busca medir es la dependencia en las colas (Zhou, 2010). Tradicionalmente las copulas se estiman mediante métodos paramétricos, lo que implica que es necesario hacer supuestos adicionales en cuanto a la forma funcional de las mismas, esto hace que sea un método más restrictivo.

A continuación se mostrará que todos los indicadores de riesgo sistémico pueden escribirse en términos de la función $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_d)$, y por lo tanto, para encontrar estimadores de los indicadores será suficiente estimar la función \mathcal{L} .

Proposición 2. Si decimos que $PAO_i = \lim_{p \rightarrow 0} PAO_i(p)$ entonces,

$$PAO_i = \mathcal{L}_{\neq i}(1, \dots, 1) + 1 - \mathcal{L}(1, \dots, 1) \quad (9)$$

donde $\mathcal{L}_{\neq i} = \mathcal{L}(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ con el cero en la i -ésima posición.

La demostración de esta proposición se tomo de Zhou (2010) y puede consultarse en el Apéndice Apéndice A.

De la misma forma, siguiendo a Zhou (2010), el indicador $VI_i(p)$ también puede escribirse en términos de la función \mathcal{L} . Lo que se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3. Si decimos que $VI_i = \lim_{p \rightarrow 0} VI_i(p)$ entonces,

$$VI_i = \frac{\mathcal{L}_{\neq i}(1, \dots, 1) + 1 - \mathcal{L}(1, \dots, 1)}{L_{\neq i}(1, \dots, 1)} \quad (10)$$

donde $\mathcal{L}_{\neq i} = \mathcal{L}(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ con el cero en la i -ésima posición.

La demostración de esta proposición está en el Apéndice Apéndice A.

Las proposiciones 2 y 3 son de gran importancia pues muestran que para la estimación de estos indicadores es suficiente estimar la función \mathcal{L} . Como lo mostró Zhou, otra de las ventajas de estos resultados es que nos permiten demostrar que, por lo menos en términos ordinales, los indicadores PAO_i y VI_i son igual de informativos, es decir, es posible mostrar que las entidades con mayor PAO tienen además el mayor VI . Intuitivamente esto quiere decir que, las entidades que más contagian al sistema también son las más propensas a ser contagiadas. Lo que se resume en el siguiente Corolario.

Corolario 1. *Considere un sistema con d entidades financieras, entonces $PAO_i > PAO_j$ si y solo si $VI_i > VI_j$ para $i, j \in [1, \dots, d]$.*

La demostración de esta proposición se consultó en Zhou (2010). En el Apéndice Apéndice A se puede consultar la demostración.

Aunque el anterior resultado es teórico es de gran importancia en lo práctico, pues note que si bien esta demostración se ha construido con un marco teórico determinado, este marco no tiene supuestos rígidos en su construcción, es decir, el resultado es cierto independiente de la variable X_k que se haya escogido para medir el estrés de una entidad. Esto significa que, independiente de la medida de estrés que se utilice, las entidades más propensas a ser contagiadas son las más propensas a contagiar al resto del sistema.

Finalmente, el indicador SII_i que mide el número esperado de bancos en entres dado que la entidad i está en esta situación también puede escribirse en términos de la función \mathcal{L} .

Proposición 4. *Si decimos que $SII_i = \lim_{p \rightarrow 0} SII_i(p)$ entonces,*

$$SII_i = \sum_{j=1}^d (2 - \mathcal{L}_{ij}(1, 1)) \quad (11)$$

donde $\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ con el uno en las posiciones i y j .

Esta proposición y su demostración se tomaron de Zhou (2010). La demostración puede consultarse en el Apéndice Apéndice A.

Es importante tener en cuenta que las probabilidades condicionales no implican una relación de causalidad sino de probabilidad de que los eventos ocurran conjuntamente. A pesar de que el análisis no debe interpretarse tratando de responder a la causalidad de los eventos, las medidas sí dan información importante acerca de la forma en que las entidades están interconectadas en el sistema.

2.2. Estrategia Empírica

Para obtener los indicadores de estabilidad financiera es suficiente estimar la función \mathcal{L} . Inicialmente es necesario obtener el valor del umbral $VaR_i(p)$ para cada una de las entidades. Este umbral debe interpretarse como una cota para el IEFI de cada entidad a partir de la que se considera que la entidad está en un escenario de estrés. Para estimar el valor de $VaR_i(p)$ se utilizaron dos metodologías. Inicialmente se estimó el valor del cuantil p de los datos observados (desde 1991 a 2011) para cada entidad. Al implementar esta metodología se encontró que los escenarios de estrés de la mayoría de entidades se ubican durante la crisis de finales de los noventas, lo que era de esperarse pues, como se verá en el capítulo (3) durante este período el IEFI alcanzó valores históricamente altos para todas las entidades. Esta metodología resulta informativa, sin embargo, es posible que no deje ver la relación de las entidades en otros períodos donde sí han existido fricciones que no han tenido repercusiones tan severas. Con el fin de capturar estas otras dependencias se estimó el $VaR_i(p)$ utilizando el método de regresión por cuantiles propuesto por Koenker & Bassett (1978). Este método permite identificar el comportamiento histórico de algún cuantil de la serie. De acuerdo con lo anterior, obtendremos un umbral que varía en el tiempo y permite analizar la interdependencia en otros escenarios de fricciones diferentes a la crisis de los noventas.

Una vez estimado el umbral $VaR_i(p)$ es necesario estimar la función \mathcal{L} a partir de la cual se estimarán los indicadores de impacto sistémico. Usando la metodología planteada por Zhou (2010), la función \mathcal{L} se estimará utilizando un método no paramétrico. Recordemos que la función \mathcal{L} se definió como la razón entre la probabilidad de que alguna entidad supere el umbral $VaR_i(p)$ y la probabilidad p , cuando p se acerca a cero (ecuación 5). Inicialmente se estima el valor del numerador de la función mediante medidas de conteo, es decir, después de fijar un valor para p es posible encontrar las realizaciones de la probabilidad en el numerador. Formalmente, el estimador de la función \mathcal{L} se define como:

$$\hat{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^n 1_{\exists 1 \leq i \leq d, tq. X_{is} > X_{i, n-[kx_i]}} \quad (12)$$

Donde $X_{i,1} \leq X_{i,2} \leq \dots \leq X_{i,d}$ son los estadísticos de orden de $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$ para $1 \leq i \leq d$. En particular, note que

$$\hat{\mathcal{L}}(1, \dots, d) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^n 1_{\exists 1 \leq i \leq d, tq. X_{is} > X_{i, n-k}}. \quad (13)$$

De acuerdo a lo planteado por Zhou (2010), el uso de este indicador presupone que los vectores de variables (X_{1t}, \dots, X_{dt}) donde t recorre el tiempo deben ser independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d). A pesar de que no podemos asegurar que la información utilizada satisface este supuesto, podemos asegurarnos de que los datos son estacionarios. Esto se analizará en más detalle en la Sección 3.

La estimación de los indicadores depende en gran medida del valor de p que se escoja. Valores muy pequeños de p están asociados con resultados volátiles, sin embargo para ser consistente con la definición de los indicadores es importante que p tome un valor tan pequeño como sea posible. De acuerdo a lo planteado por Zhou (2010), para escoger un valor de p conveniente es necesario realizar estimaciones de la función $\mathcal{L}(1, \dots, 1)$ para diferentes valores de p . Con base en esto, se debería escoger el menor p tal que la variabilidad en la función $\mathcal{L}(1, \dots, 1)$ sea baja. Es decir, un punto donde la escogencia de p haga que los resultados sean robustos a cambios pequeños en p .

3. Análisis de Datos

En esta sección se realiza una breve revisión de los datos que se utilizaron para la construcción de los indicadores de riesgo sistémico. Adicionalmente, se presentan los indicadores de tamaño e interconexión de las entidades que fueron utilizados para identificar si existe una relación entre estos y la importancia sistémica de las entidades. El ejercicio se realizó para 25 establecimientos de crédito. Las entidades que se analizaron son las que están operando actualmente y que tienen una historia representativa. Sólo se sacaron del análisis entidades pequeñas o relativamente nuevas, por lo que la muestra considerada es representativa. A diciembre de 2011, el activo de estas entidades representó el 86% del activo de los establecimientos de crédito y el 93% de la cartera bruta colocada por el sistema. Es importante tener en cuenta que no se incluyeron aquellas entidades que fueron liquidadas durante la crisis de finales de los noventas pues estas no tenían suficiente información que lograra resultados robustos. Por esto, es probable que algunos de los indicadores, en particular el SII_i esté subestimado.

⁴Este estimador cumple con propiedades de consistencia y normalidad asintótica, lo que es demostrado por Hann & Ferreira (2006)

3.1. Riesgo sistémico

Siguiendo la definición de inestabilidad financiera sugerida por Tsomocos (2003), para la construcción de los indicadores de riesgo sistémico se busca utilizar un indicador que incorpore información de eventos de baja rentabilidad e incrementos en los niveles incumplimiento en los portafolios de crédito de los establecimientos de crédito. Para esto utilizamos el Indicador de Estabilidad Financiera (IEFI) construido por Morales & Estrada (2010), el cual tiene en cuenta consideraciones de rentabilidad, morosidad y liquidez.

Utilizando la información de los balances financieros reportados a la Superintendencia Financiera de Colombia por los bancos, se construyó una base de datos compuesta por 16 bancos y 9 compañías de financiamiento (CF) para un período comprendido entre junio de 1991 y diciembre de 2011⁵. Para cada una de estas entidades se calcularon medidas de riesgo de crédito, rentabilidad y liquidez con las cuales se construyó el IEFI. La estimación del IEFI se realizó utilizando componentes principales (CP) y matrices de correlación, tal como es planteado por Morales & Estrada (2010). Valores positivos del IEFI deben ser interpretados como momentos de estrés para los intermediarios, mientras que valores negativos representan condiciones positivas respecto a la historia de las entidades.

En el Cuadro 1 se presentan las estadísticas descriptivas del IEFI para cada una de las entidades consideradas. Al analizar la media del indicador se encuentra que esta es cero, o muy cercano a cero, para todas las entidades, lo cual se debe a la estimación de los CP utilizando matrices de correlación. Asimismo, se observa que la mediana para la mayoría de intermediarios es negativa, lo que indica que las entidades han pasado más tiempo en situaciones favorables que adversas. Al evaluar los valores máximos y mínimos de las series, es posible verificar que, en general, todos los períodos de estrés han tenido un efecto más grande sobre el indicador que los eventos de prosperidad. Por su parte, el cuantil 95 % del IEFI muestra que las condiciones adversas han sido más profundas para algunos bancos que para otros.

En los gráficos 2, 3 y 4 se presentan la rentabilidad del activo (ROA), el indicador de mora (IM) y el IEFI para cada uno de los intermediarios durante el período de análisis. De la misma manera que ocurre para el agregado del sistema, al comparar el ROA y el IM por entidad con el IEFI es posible verificar que este último refleja momentos de baja rentabilidad y alta morosidad. De acuerdo con los datos, la gran mayoría de los intermediarios presentaron disminuciones considerables en su utilidad e incrementos en la materialización del riesgo de crédito durante la crisis financiera de finales de los noventa. Los efectos de la crisis fueron considerablemente más fuertes para las entidades especializadas en cartera hipotecaria. Si se evalúa la dinámica del IEFI durante este período, se observa que para las entidades afectadas, el indicador tomó valores positivos y para la mayoría de los intermediarios alcanzó su máximo histórico.

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo 2, es importante garantizar que la serie de vectores que captura el desempeño de cada entidad financiera tenga un comportamiento por lo menos estacionario. Con el objetivo de garantizar que la serie del IEFI de todas las entidades tiene primer y segundo momento constante se verificó que el valor absoluto de las raíces del polinomio característico del proceso son menores a uno (Hamilton (1994)). En el apéndice Apéndice C se presentan con los resultados de este ejercicio.

⁵En este análisis no se incluyó el Banco Agrario.

CUADRO 1: Estadísticas descriptivas del IEFI

Entidad	Media	Mediana	Máximo	Mínimo	Q 95 %	Des. Est.	Obs.
Banco 1	0,000	-0,039	4,053	-3,361	3,040	1,624	247
Banco 2	0,000	0,247	4,373	-3,449	3,040	2,101	247
Banco 3	0,000	-0,294	5,075	-3,424	3,663	1,815	247
Banco 4	0,000	-0,555	6,216	-2,575	4,863	1,962	247
Banco 5	0,000	-0,325	3,950	-4,063	2,566	1,632	247
Banco 6	0,000	-0,089	4,534	-2,953	2,644	1,778	247
Banco 7	0,000	-0,553	5,970	-2,953	4,010	1,882	247
Banco 8	0,000	-0,554	6,634	-2,598	3,613	1,812	247
Banco 9	0,000	-0,111	4,661	-3,267	2,856	1,611	247
Banco 10	0,000	0,329	4,957	-4,022	4,243	1,868	247
Banco 11	0,000	-0,199	3,581	-4,299	2,667	1,644	247
Banco 12	0,000	-0,466	7,157	-2,304	3,893	1,785	247
Banco 13	0,000	-0,544	4,589	-2,450	3,568	1,872	247
Banco 14	0,000	-0,696	8,020	-2,004	3,551	1,791	247
Banco 15	0,000	0,119	4,268	-3,749	3,251	1,971	247
Banco 16	0,000	-0,453	8,311	-2,312	3,028	1,471	247
CF 1	0,000	-0,080	8,900	-3,438	3,250	1,894	247
CF 2	0,000	-0,481	3,231	-4,836	2,835	1,868	247
CF 3	0,000	-0,285	5,759	-5,128	3,212	1,859	247
CF 4	0,000	-0,190	5,213	-3,064	3,418	1,716	247
CF 5	0,000	-0,124	3,679	-3,872	3,034	1,704	247
CF 6	0,000	0,088	4,145	-4,099	2,797	1,832	247
CF 7	0,000	-0,064	6,791	-3,599	3,066	1,703	247
CF 8	0,000	-0,825	5,189	-2,262	4,043	1,941	247
CF 9	0,000	-0,119	7,528	-3,038	3,194	1,652	247

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculo de los autores.

3.2. Tamaño e interconexión

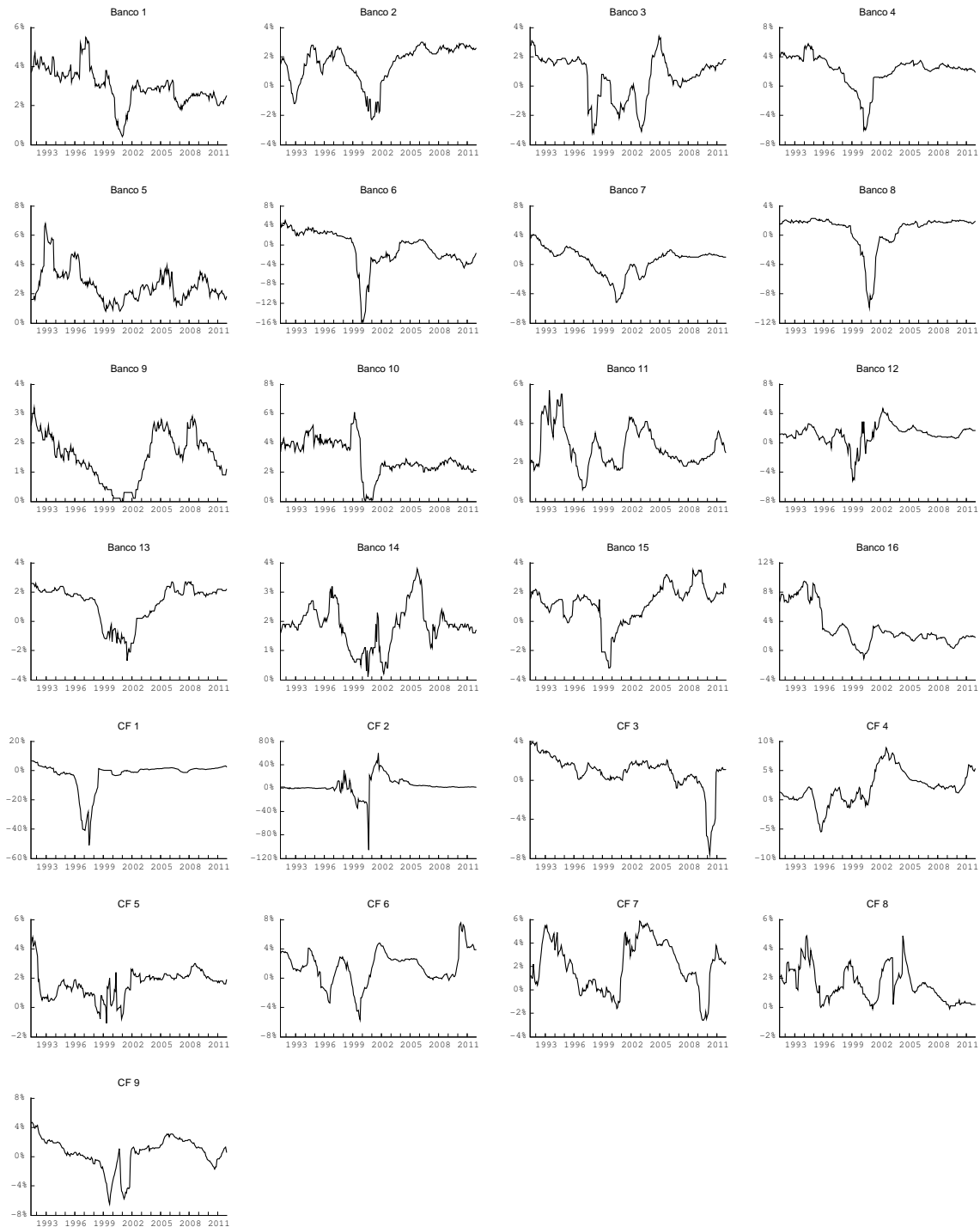
Con el fin de identificar si las entidades más grandes o más interconectadas en el mercado interbancario son las que tienen los indicadores de riesgo sistémico más altos, se construyeron indicadores de tamaño e interconexión para capturar su relación con el PAO_i , el SII_i y el VI_i .

Siguiendo lo propuesto por Zhou y tomando en consideración las características de la banca en Colombia⁶, se eligieron tres variables para calcular los indicadores de tamaño de las entidades: *i*) activos, *ii*) patrimonio y *iii*) cartera bruta. Los indicadores se construyeron como un promedio simple de las variables antes mencionadas entre 1990 y 2011 y adicionalmente sólo para diciembre de 2011.

Con los primeros indicadores se busca capturar la representatividad de cada entidad a lo largo del período de estudio y con la segunda, el tamaño actual de las entidades. En el cuadro 2 se muestran algunas estadísticas descriptivas de la participación promedio de las entidades de acuerdo a cada uno de los criterios antes mencionados. Se observa que existen algunos bancos que han ganado importancia. Esto puede deberse, entre otras cosas, a que el número de bancos se ha reducido de forma importante entre 1990 y 2011. De la misma forma, las cinco entidades con una mayor proporción de activos concentran cerca del 63 % de los activos de los bancos y las CF a diciembre de 2011, a pesar de que para el promedio entre 1990 y 2011 las mismas entidades representaban el 40 % de los activos. Adicionalmente, vale la pena resaltar que las entidades más grandes son bancos y las más pequeñas son CF.

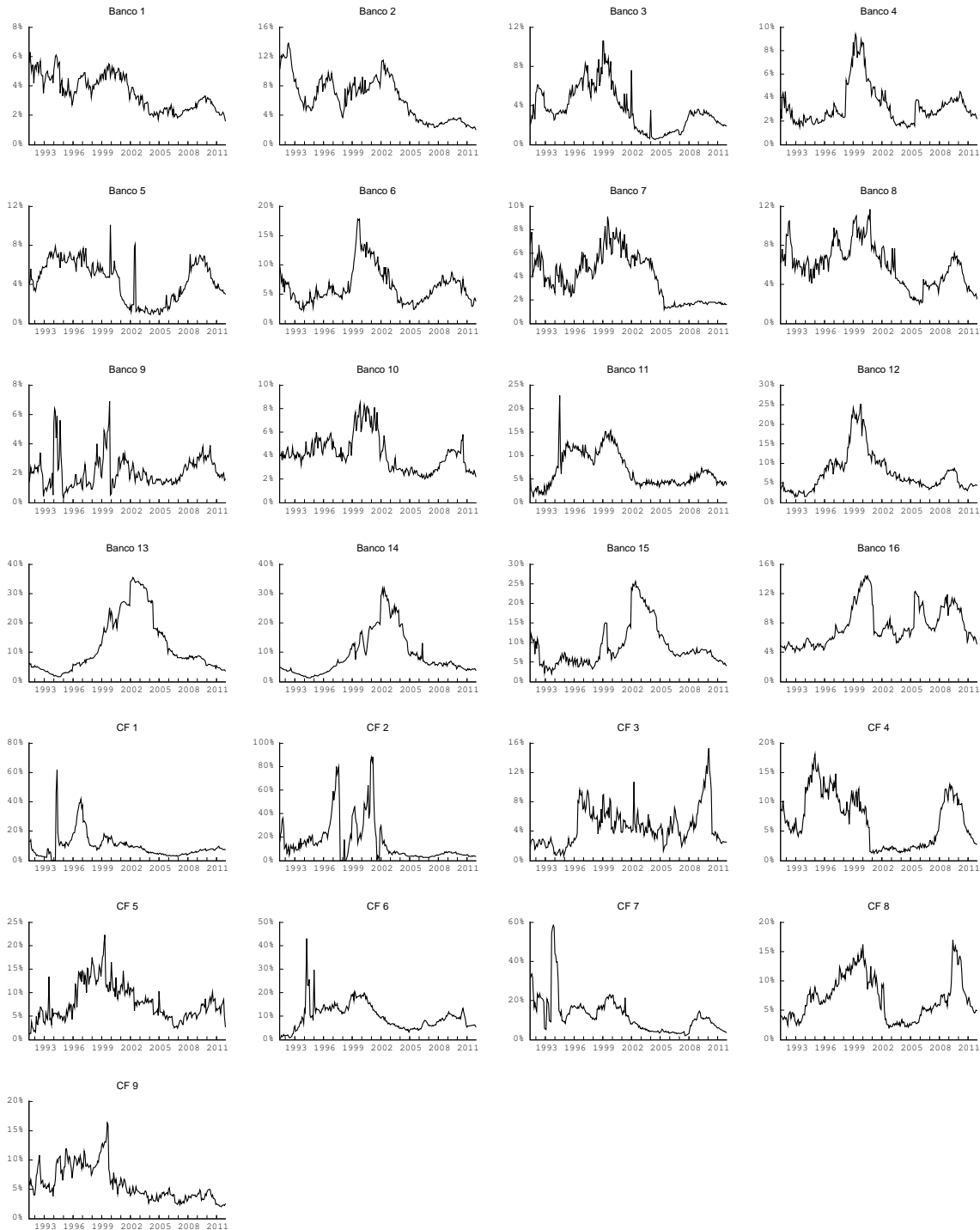
⁶El sistema financiero colombiano tiene un modelo de banca tradicional en donde el activo principal de los intermediarios es la cartera, a diferencia del modelo Anglo-Sajón que está basado en un mercado de capitales más desarrollado, el cual es utilizado por las empresas para financiarse.

GRÁFICO 2: ROA por entidad



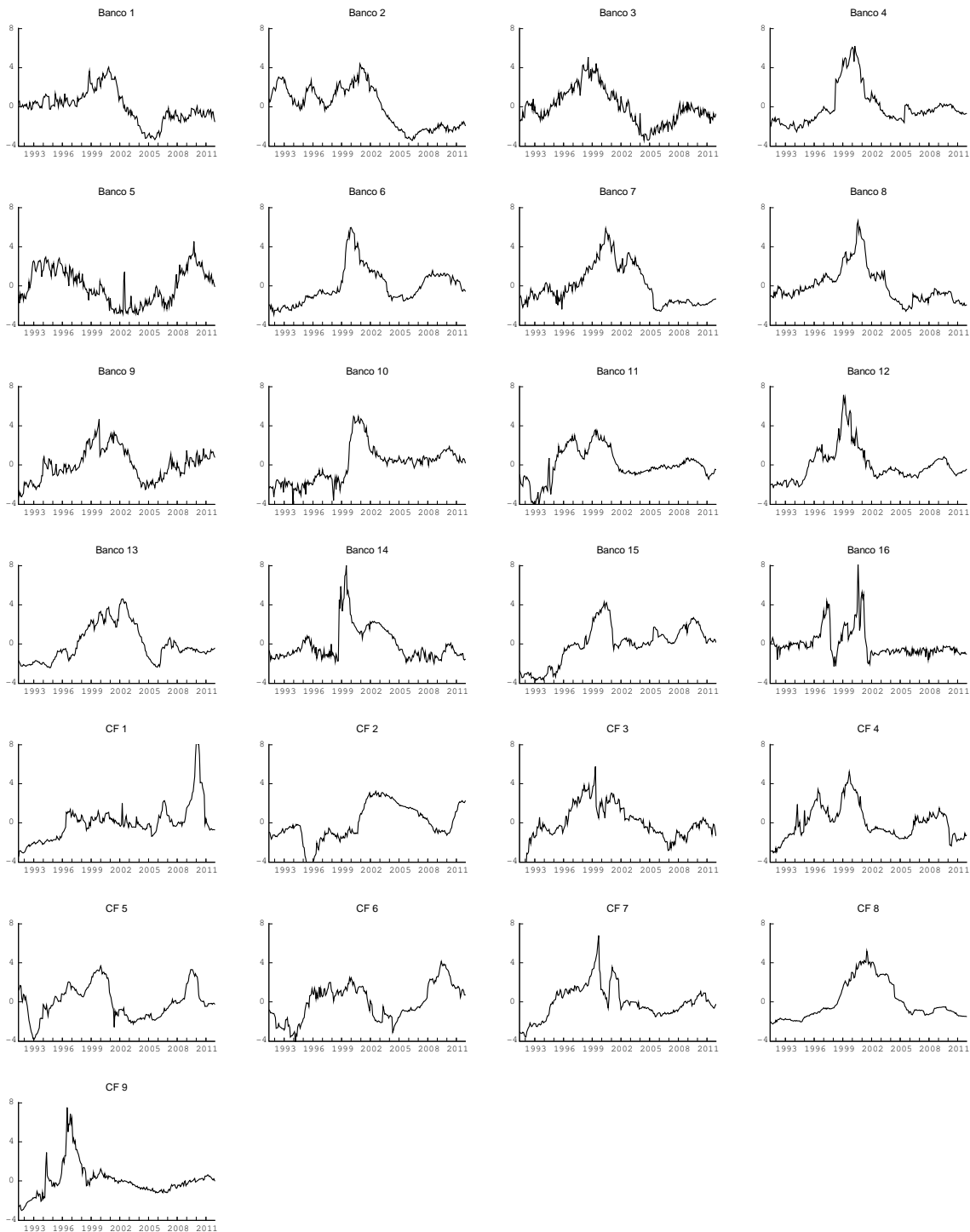
Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

GRÁFICO 3: IM por entidad



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

GRÁFICO 4: IEFI por entidad



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

CUADRO 2: Indicadores de tamaño

Entidad	Promedio 1990 - 2011			Diciembre 2011		
	Activo	Patrimonio	Cartera	Activo	Patrimonio	Cartera
Banco 1	9.1 %	13.4 %	8.1 %	14.4 %	20.7 %	13.3 %
Banco 2	4.9 %	5.4 %	4.6 %	4.7 %	4.8 %	5.1 %
Banco 3	3.4 %	3.6 %	3.1 %	2.6 %	2.0 %	2.7 %
Banco 4	11.2 %	14.3 %	11.1 %	20.7 %	22.5 %	22.4 %
Banco 5	2.9 %	3.8 %	3.0 %	2.7 %	3.6 %	2.6 %
Banco 6	0.9 %	0.9 %	1.0 %	0.9 %	0.5 %	0.7 %
Banco 7	1.6 %	1.3 %	1.4 %	3.3 %	1.6 %	2.3 %
Banco 8	8.0 %	8.4 %	7.8 %	8.7 %	6.6 %	9.2 %
Banco 9	2.0 %	2.3 %	2.1 %	3.8 %	3.1 %	3.2 %
Banco 10	4.7 %	5.7 %	4.0 %	7.0 %	7.8 %	5.8 %
Banco 11	2.2 %	2.2 %	2.4 %	3.0 %	2.6 %	2.9 %
Banco 12	3.3 %	2.3 %	3.3 %	4.4 %	3.1 %	5.5 %
Banco 13	3.0 %	2.4 %	3.3 %	2.5 %	2.4 %	2.6 %
Banco 14	6.7 %	6.0 %	7.3 %	11.7 %	12.3 %	12.2 %
Banco 15	0.2 %	0.3 %	0.2 %	0.4 %	0.4 %	0.3 %
Banco 16	0.3 %	0.3 %	0.4 %	0.5 %	0.6 %	0.5 %
CF 1	0.1 %	0.1 %	0.1 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %
CF 2	0.1 %	0.1 %	0.1 %	0.1 %	0.1 %	0.1 %
CF 3	0.2 %	0.3 %	0.2 %	0.2 %	0.1 %	0.3 %
CF 4	0.1 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %
CF 5	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.2 %	0.3 %
CF 6	0.5 %	0.5 %	0.6 %	0.4 %	0.4 %	0.6 %
CF 7	0.4 %	0.8 %	0.6 %	0.3 %	0.6 %	0.4 %
CF 8	0.1 %	0.2 %	0.1 %	0.1 %	0.1 %	0.1 %
CF 9	0.3 %	0.4 %	0.4 %	0.2 %	0.1 %	0.2 %

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculo de los autores.

En el caso del mercado interbancario, se construyeron seis indicadores con los que se busca cuantificar la importancia de cada entidad en el Sistema Electrónico de Negociación (SEN), siguiendo las consideraciones de centralidad expuestas en Saade Ospina (2010). Los tres primeros indicadores miden el número de agentes a los que una entidad compró, vendió o con los que transó⁷ como porcentaje del número total de entidades que participaron en el mercado en cada día. Estos indicadores tienen en cuenta la cantidad de conexiones de un agente en el mercado, pero no consideran cuán importante es dicha conexión. Por esta razón, los últimos tres indicadores son calculados como la participación del monto comprado, vendido o transado en el monto total de negociaciones diarias en el SEN. Se obtuvieron estos indicadores para cada uno de los días en que abrió el SEN entre enero de 2006 y diciembre de 2011 y finalmente se promediaron estos valores históricos con el fin de encontrar un único valor de cada indicador por entidad.

De acuerdo con la información del SEN, se observó que, en promedio, 15 entidades transaron diariamente entre 2006 y 2011, y que 26 entidades transaron al menos en una ocasión durante el período referenciado. De la misma manera, una entidad transa, en promedio, con el 47% de los participantes diarios del mercado. Por su parte, se observa que el monto diario promedio transado es de \$3,8 billones, lo que equivale al 1,8% del activo promedio, en el período mencionado, y el 8,3% de las inversiones promedio. Es importante mencionar que ninguna CF y no todos los bancos transaron en el SEN entre 2006 y 2011 y adicionalmente, hay entidades diferentes a bancos y CF, como comisionistas de bolsa y fondos de pensiones, entre otras, que participan de forma importante en este mercado. Para el cálculo de

⁷Hace referencia a una operación de compra o venta. Al realizar el conteo del número de contrapartes con las que una entidad transó, si una entidad realizó una compra y una venta con una misma contraparte se contabiliza una única vez.

las correlaciones se utilizó solo la muestra de bancos que transaron en el interbancario en el período de estudio. En la siguiente tabla se resumen los resultados de dos de los indicadores de interconexión para las entidades que nos interesan (Bancos o CF) y que transaron en el SEN entre 2006 y 2011.

CUADRO 3: Indicadores de interconexión

	Porcentaje de entidades con las que transa en promedio al día	Participación en monto promedio transado al día
<i>Banco 1</i>	68.9 %	7.3 %
<i>Banco 2</i>	59.3 %	5.1 %
<i>Banco 3</i>	84.7 %	12.0 %
<i>Banco 4</i>	94.1 %	23.3 %
<i>Banco 5</i>	86.6 %	13.1 %
<i>Banco 6</i>	20.4 %	2.3 %
<i>Banco 7</i>	79.1 %	13.0 %
<i>Banco 8</i>	88.2 %	19.3 %
<i>Banco 9</i>	12.9 %	0.8 %
<i>Banco 10</i>	0.2 %	0.0 %
<i>Banco 11</i>	66.8 %	7.5 %
<i>Banco 14</i>	84.7 %	16.8 %

Fuente: Banco de la República, cálculos de los autores.

4. Análisis de Resultados

4.1. Indicadores de Impacto Sistémico y tamaño de las entidades

Para estimar los indicadores de importancia sistémica se utilizaron dos metodologías con el fin de encontrar el valor de $VaR_i(p)$. Inicialmente, se estimó este valor calculando el cuantil p de los datos históricos del *IEFI*, esta metodología arroja un único umbral para cada entidad. En este caso, se encontró que las ocasiones donde se superaba el umbral, es decir los escenarios de estrés, ocurrían principalmente durante la crisis de finales de los noventa para todas las entidades y algunas durante la crisis internacional de 2008-2009. Adicionalmente, entre los años 2004 y 2008, y durante 2011 ninguna entidad estuvo en un escenario de estrés. Por considerar que esta metodología podría no dejar ver algunas correlaciones entre las variables en momentos donde también ha habido fricciones financieras pero que no han tenido repercusiones tan severas, también se cuantificó el valor de $VaR_i(p)$ mediante la metodología de regresión por cuantiles planteada por Koenker & Bassett (1978). En este caso se obtiene un umbral para cada momento del tiempo y se encuentra que los escenarios de estrés de las entidades se distribuyen a lo largo del período de análisis. Se encuentra que en casi todos los períodos hubo al menos alguna entidad en estrés, en particular, en cada momento del tiempo se presentaron, en promedio, 2,6 entidades en estrés. La Gráfico 5 muestra, para cada una de las metodologías, el número de entidades en estrés en cada momento del tiempo.

En el Cuadro 4 se muestran los resultados de los indicadores de importancia sistémica calculados utilizando el cuantil $p = 7,5\%$ de los datos históricos.⁸

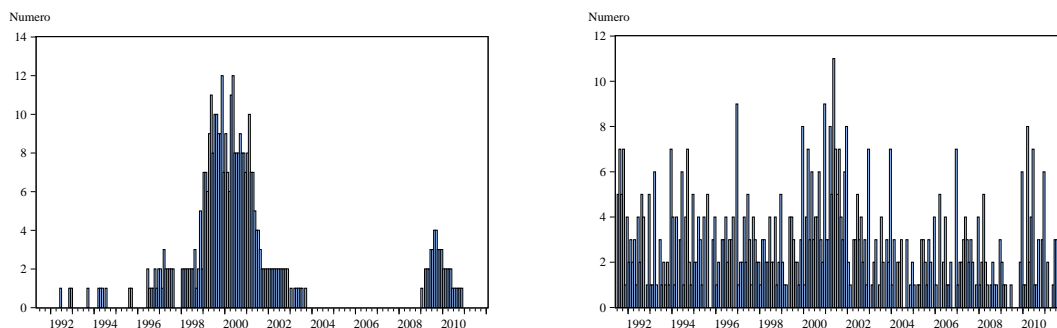
Como se demostró en el Corolario 1, altos valores de *PAO* coinciden con altos valores de *VI*. Como también se mencionó, un número importante de entidades tiene un *PAO* igual a 100 %.

⁸En el Apéndice C se amplía la información acerca de la escogencia de este valor.

GRÁFICO 5: Número de entidades en estrés

A. Cuantil (p=7,5%)

B. Regresión por Cuantiles (p=10%)



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia; cálculos de los autores.

CUADRO 4: Medidas de Impacto Sistémico - Cuantil p=7,5 %

	SII	VI	PAO		SII	VI	PAO
<i>Banco 6</i>	10,0	15,1 %	100 %	<i>Banco 14</i>	8,2	15,1 %	100 %
<i>Banco 12</i>	10,0	15,1 %	100 %	<i>Banco 11</i>	6,7	15,1 %	100 %
<i>Banco 4</i>	9,8	15,1 %	100 %	<i>Banco 2</i>	5,9	11,5 %	73,2 %
<i>Banco 8</i>	9,6	15,1 %	100 %	<i>CF 8</i>	5,8	15,1 %	100 %
<i>Banco 7</i>	9,6	15,1 %	100 %	<i>CF 3</i>	5,6	14,4 %	94,6 %
<i>CF 4</i>	9,5	15,1 %	100 %	<i>Banco 3</i>	5,6	14,4 %	94,6 %
<i>Banco 1</i>	9,4	15,1 %	100 %	<i>Banco 13</i>	5,2	15,1 %	100 %
<i>CF 7</i>	8,9	15,1 %	100 %	<i>CF 6</i>	2,9	13,0 %	83,9 %
<i>CF 5</i>	8,8	15,1 %	100 %	<i>CF 1</i>	2,7	10,7 %	67,9 %
<i>Banco 16</i>	8,7	15,1 %	100 %	<i>Banco 5</i>	2,6	9,2 %	57,2 %
<i>Banco 10</i>	8,4	15,1 %	100 %	<i>CF 2</i>	2,2	9,2 %	57,2 %
<i>Banco 15</i>	8,3	15,1 %	100 %	<i>CF 9</i>	2,1	10,0 %	62,5 %
<i>Banco 9</i>	8,2	15,1 %	100 %				

Fuente: cálculos de los autores.

Los resultados muestran que las entidades con mayor *SII* y *PAO* son bancos. Se encontró que en el caso en que el *Banco 6* estuviera en una situación de estrés se esperaría que 9 entidades adicionales estuvieran en esta situación (39% del sistema de 25 establecimientos), resultados similares se obtuvieron para los *Bancos 12, 4, 8, y 7*. Por otra parte, en el grupo de entidades con menores indicadores de impacto sistémico, se encuentran mayormente las *CF*. Note que para los *Bancos 6, 12 o 7* no se encontró que tuvieran una participación importante en la cartera, el patrimonio o los activos de los establecimientos de crédito y, en particular, el *Banco 6* no muestra altos niveles de interconexión en el interbancario. A pesar de esto, las estimaciones muestran que estas entidades son sistémicamente importantes. Este resultado merece especial atención puesto que muestra que no es necesario que una entidad sea grande o tenga una participación alta en el mercado interbancario para ser un agente sistémico.

Para verificar esto, se evaluó la relación que existe entre el tamaño de las entidades y su importancia sistémica. En este orden de ideas, se calculó el coeficiente de correlación de Spearman entre los indicadores de importancia sistémica y las tres medidas de tamaño que fueron descritas en la sección 3. Las medidas de tamaño fueron calculadas para el período comprendido entre enero de 1990 y diciembre de 2011, y, adicionalmente, sólo para diciembre de 2011. La primera correlación nos permite analizar si el tamaño caracteriza entidades sistémicas y con la segunda podremos evaluar si las entidades sistémicas

representan hoy una porción importante del mercado de crédito. En cada caso se analizó si la correlación es estadísticamente diferente de cero.

En el Cuadro 5 se resumen las correlaciones entre los indicadores de impactos sistémico y las medidas de tamaño antes descritas. Se encontró que todas las correlaciones entre las variables de tamaño y los indicadores de impacto sistémico son positivas. El *PAO* y *VI* sólo tienen una relación estadísticamente diferente de cero con el valor del activo y la cartera a diciembre de 2011. Además, el indicador de impacto sistémico, *SII*, resultó tener una correlación significativa, al 5 % o 10 %, con todas las variables de tamaño. Este resultado sugiere que las entidades más grandes son las que tienen un mayor impacto sistémico.

CUADRO 5: Correlación de Spearman: Impacto Sistémico y Tamaño

	PAO	VI	SII
Promedio 1990 - 2011			
<i>Activos</i>	0.291 (0.16)	0.291 (0.16)	0.380* (0.061)
<i>Patrimonio</i>	0.322 (0.12)	0.322 (0.12)	0.411** (0.04)
<i>Cartera Bruta</i>	0.273 (0.19)	0.273 (0.19)	0.364* (0.07)
diciembre de 2011			
<i>Activos</i>	0.376* (0.06)	0.376* (0.06)	0.470** (0.02)
<i>Patrimonio</i>	0.289 (0.16)	0.289 (0.16)	0.378* (0.06)
<i>Cartera Bruta</i>	0.353* (0.08)	0.353* (0.08)	0.419* (0.04)

***, ** y * denotan un nivel de significancia del 1%, 5% y 10%.

Fuente: cálculos de los autores.

Por otra parte, al estimar los indicadores utilizando el método de regresión por cuantiles⁹ se encontró que las entidades con mayor índice de impacto sistémico (*SII*) son actualmente bancos. Es importante resaltar que este indicador toma valores menores que al realizar la estimación por medio de un cuantil fijo, lo que está explicado porque mediante el método del cuantil p todas las crisis de las entidades están concentradas en un período de tiempo más corto. Por su parte, en el grupo de las entidades con menor *SII* encontramos bancos y CF. Para las entidades *CF 8* y *Banco 10* encontramos que, a pesar de que la probabilidad de que otras entidades estén en estrés en períodos donde estas lo están es alta (*PAO*), el impacto esperado de este escenario es bajo, pues el *SII* no alcanza valores muy altos en relación a las demás entidades (Cuadro 6). Este resultado puede ser explicado por el hecho de que una entidad puede estar altamente interrelacionada con un número pequeño de entidades, lo que hace que su *PAO* sea cercano a 1, a pesar de que el *SII* sea bajo.

Es importante resaltar que los *Bancos 12, 4, 8 y 1* tienen valores altos de *SII* y *PAO* en las dos estimaciones. Por su parte, el *Banco 5* tiene indicadores bajos, con respecto a las demás entidades, utilizando las dos metodologías de estimación. Es importante resaltar que los *Bancos 12 y 3* tienen niveles altos de los indicadores de importancia sistémica a pesar de que estas entidades no participan mayoritariamente en cartera, patrimonio o activos.

En el Cuadro 7 se muestran las correlaciones de las medidas de riesgo sistémico calculados por medio de regresión por cuantiles y las variables de tamaño. De nuevo, se encontró que la correlación entre las

⁹En este caso el valor de p que resultó robusto fue $p = 10\%$.

CUADRO 6: Medidas de Impacto Sistémico- Regresión por cuantiles p=10%

	SII	VI	PAO		SII	VI	PAO
<i>Banco 16</i>	4,4	11,7 %	100 %	<i>Banco 11</i>	3,0	11,7 %	100 %
Banco 4	4,0	11,3 %	95,9 %	<i>CF 9</i>	2,8	10,9 %	91,9 %
Banco 8	3,9	10,4 %	87,8 %	<i>CF 3</i>	2,7	10,9 %	91,9 %
Banco 12	3,8	11,3 %	95,9 %	<i>CF 6</i>	2,7	10,9 %	91,9 %
Banco 1	3,7	11,3 %	95,9 %	<i>Banco 9</i>	2,4	10,4 %	87,8 %
<i>Banco 3</i>	3,6	11,3 %	95,9 %	<i>CF 2</i>	2,4	10,4 %	87,8 %
<i>CF 4</i>	3,6	10,4 %	87,8 %	<i>CF 7</i>	2,4	10,0 %	83,7 %
<i>CF 1</i>	3,6	10,4 %	87,8 %	<i>Banco 10</i>	2,3	11,7 %	100 %
<i>CF 5</i>	3,6	10,4 %	87,8 %	<i>Banco 14</i>	2,3	9,6 %	79,7 %
<i>Banco 6</i>	3,1	11,7 %	100 %	<i>Banco 5</i>	2,3	9,1 %	75,6 %
<i>Banco 7</i>	3,1	11,3 %	95,9 %	<i>Banco 2</i>	2,2	10,0 %	83,7 %
<i>Banco 13</i>	3,1	10,9 %	91,9 %	<i>CF 8</i>	2,1	10,9 %	91,9 %
<i>Banco 15</i>	3,1	10,9 %	91,9 %				

Fuente: cálculos de los autores.

variables es positiva; sin embargo, en ningún caso esta correlación es estadísticamente diferente de cero con un nivel de confianza del 90 %.

CUADRO 7: Correlación de Spearman: Impacto Sistémico y Tamaño

	PAO	VI	SII
Promedio 1990 - 2011			
<i>Activos</i>	0.147 (0.48)	0.147 (0.48)	0.123 (0.56)
<i>Patrimonio</i>	0.099 (0.64)	0.099 (0.64)	0.081 (0.70)
<i>Cartera Bruta</i>	0.137 (0.51)	0.137 (0.51)	0.125 (0.55)
diciembre de 2011			
<i>Activos</i>	0.197 (0.34)	0.197 (0.34)	0.162 (0.44)
<i>Patrimonio</i>	0.098 (0.64)	0.098 (0.64)	0.144 (0.49)
<i>Cartera Bruta</i>	0.188 (0.37)	0.188 (0.37)	0.167 (0.42)

***, ** y * denotan un nivel de significancia del 1 %, 5 % y 10 %.

Fuente: cálculos de los autores.

Los indicadores de importancia sistémica calculados mediante el método del cuantil p , que capturan la crisis de finales de los noventa y algo de lo ocurrido en 2009, están en algunos casos correlacionados con variables de tamaño, en particular, se encontró que las entidades que tienen un mayor impacto sistémico son las más grandes. En ninguna de las estimaciones se encontró que las medidas PAO y VII , que miden la probabilidad de contagiarse o ser contagiado, muestren correlaciones significativas con variables de tamaño. Es importante resaltar que es posible identificar entidades con niveles altos de importancia sistémica que no tienen una interconexión particularmente alta en el interbancario y tampoco están en el grupo de las entidades más grandes.

4.2. Indicadores de impacto sistémico e interconexión en el mercado interbancario

Con el fin de identificar la vía por la cuál el riesgo se transmite entre las entidades, se estimó la correlación entre las medidas de impacto sistémico y variables de centralidad en el mercado interbancario¹⁰. Este análisis nos permitirá evaluar si las entidades con altos indicadores de impacto sistémico son las entidades que históricamente han estado más interconectadas en el mercado interbancario. Como se mencionó, se tomó la información de todas las transacciones realizadas en el SEN entre enero de 1999 y diciembre de 2011, y se construyó la red formada por los agentes participantes en cada uno de los días en que estuvo abierto el mercado entre estas fechas. Para cada agente que participa en el mercado se calculó el número de entidades a las que compró y vendió como porcentaje del total de entidades participantes en cada día. Adicionalmente, se calculó el monto vendido y comprado a diario por cada entidad como porcentaje del monto total transado diariamente. Finalmente, se promediaron las medidas encontradas entre 1999 y 2011 con el fin de compararlas con las medidas de impacto sistémico.

Al realizar la correlación entre los indicadores de importancia sistémica obtenidos mediante el cuantil fijo y los indicadores de centralidad promedio entre 1999 y 2011 no se encontró ninguna relación estadísticamente diferente de cero. Al utilizar los indicadores calculados utilizando el método de regresión por cuantiles se encontró que las entidades que participan mayoritariamente en el monto transado diariamente tienen indicadores de importancia sistémica (*PAO* y *VI*) menores (Cuadros 8, 9). Esto último llama la atención, pues la relación entre las variables muestra el signo contrario al esperado.

En general, las variables de interconexión en el mercado interbancario parecen no explicar la importancia sistémica de las entidades, esto puede deberse a que este mercado representa una porción baja del balance de las entidades en Colombia.

CUADRO 8: Correlación de Spearman: Impacto Sistémico (cuantil p=7,5%) y Centralidad)

	PAO	VI	SII
<i>Porcentaje de entidades a las que vende</i>	-0.192 (0.53)	-0.192 (0.53)	-0.352 (0.24)
<i>Porcentaje de entidades a las que compra</i>	-0.192 (0.53)	-0.192 (0.53)	-0.319 (0.29)
<i>Porcentaje de entidades con las que transa</i>	-0.192 (0.53)	-0.192 (0.53)	0.319 (0.29)
<i>Porcentaje de monto vendido</i>	-0.131 (0.67)	-0.131 (0.67)	-0.236 (0.44)
<i>Porcentaje de monto comprado</i>	0.004 (0.99)	0.004 (0.99)	-0.190 (0.53)
<i>Porcentaje de monto transado</i>	-0.131 (0.67)	-0.131 (0.67)	-0.253 (0.40)

***, ** y * denotan un nivel de significancia del 1%, 5% y 10%.

Fuente: cálculos de los autores.

4.3. Ejercicio de estrés

Con el objetivo de evaluar los efectos que podría tener un choque adverso en la economía sobre el riesgo sistémico, se realizó un ejercicio de estrés siguiendo la metodología sugerida por Cabrera et al. (2012). Los autores utilizan un VEC para modelar el efecto que tiene un choque en el crecimiento del

¹⁰Una entidad central es aquella que está muy conectada con otras entidades y cuyas transacciones representan un valor alto de las que se realizan en el mercado interbancario.

CUADRO 9: Correlación de Spearman: Impacto Sistémico (regresión por cuantiles p=10 %) y Centralidad

	PAO	VI	SII
<i>Porcentaje de entidades a las que vende</i>	-0.450 (0.12)	-0.450 (0.12)	0.214 (0.48)
<i>Porcentaje de entidades a las que compra</i>	-0.381 (0.20)	-0.381 (0.20)	0.264 (0.38)
<i>Porcentaje de entidades con las que transa</i>	-0.416 (0.16)	-0.416 (0.16)	0.214 (0.48)
<i>Porcentaje de monto vendido</i>	-0.450 (0.12)	-0.450 (0.12)	0.253 (0.41)
<i>Porcentaje de monto comprado</i>	-0.380 (0.20)	-0.380 (0.20)	0.344 (0.25)
<i>Porcentaje de monto transado</i>	-0.492* (0.09)	-0.492* (0.09)	0.264 (0.38)

***, ** y * denotan un nivel de significancia del 1 %, 5 % y 10 %.

Fuente: cálculos de los autores.

PIB real, la tasa de interés DTF real, el índice de precios de vivienda nueva (IPVN) real y la tasa de desempleo sobre la cartera y su morosidad. Para el objetivo de este documento, el escenario de estrés fue construido en base al realizado por Cabrera et al. (2012). De esta manera, se establecieron las peores sendas observadas para cada una de las variables macroeconómicas mencionadas durante un período de ocho trimestres. Posteriormente, se cuantificó el efecto del choque sobre el IM y la cartera improductiva y adicionalmente sobre el ROA y el ROE, teniendo en cuenta que este choque tiene efectos en los ingresos por intereses y las provisiones. Con los valores estresados de estos indicadores financieros, se calculó el IEFI estresado para cada banco¹¹.

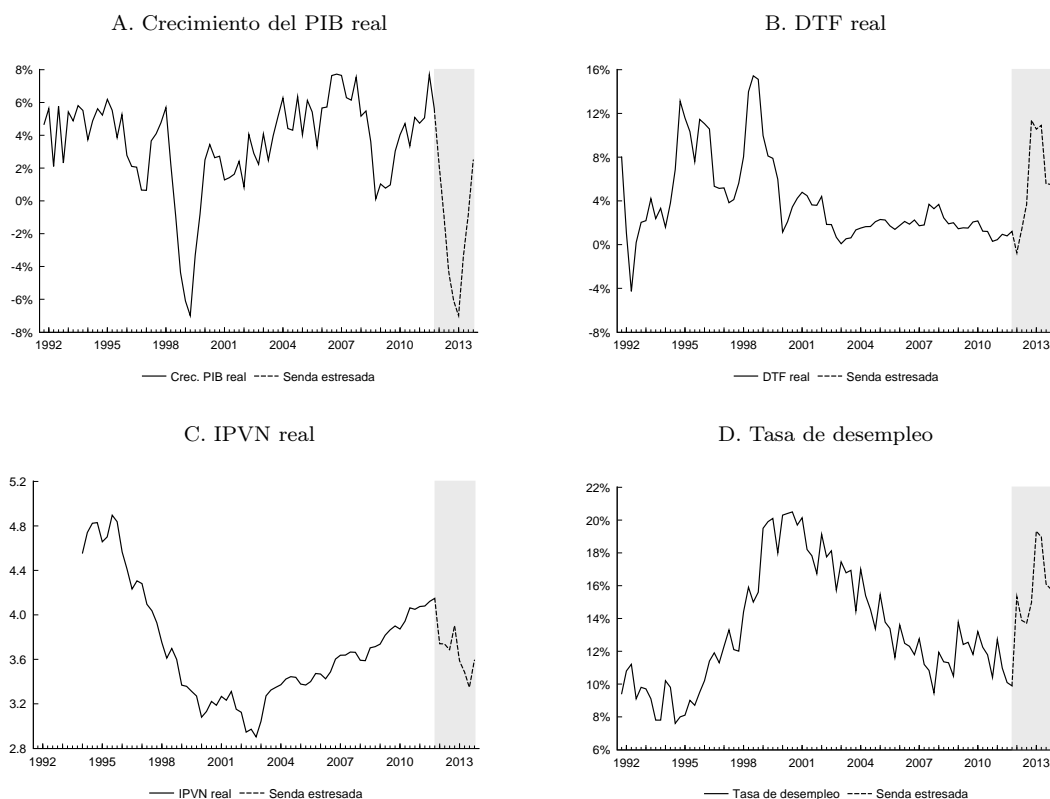
En el Gráfico 6 se presentan los valores estresados para cada una de las variables macroeconómicas consideradas. Como se puede ver, el escenario de estrés refleja lo acontecido durante la crisis de finales de los noventa. Los primeros seis trimestres reflejan un escenario de alta vulnerabilidad en la economía, mientras que en los dos últimos trimestres se presenta una recuperación.

El Gráfico 7 muestra los efectos del choque sobre los indicadores financieros de los bancos. Los resultados muestran que el choque tiene un efecto considerable sobre la morosidad de la cartera que se traduce en un aumento de la cartera improductiva (CI). El IM pasa de 2,8 % antes del choque a 8,1 % seis trimestres después. Por su parte, la CI registra un incremento de 4,5 pp, al pasar de 1,8 % a 6,3 % en el mismo período. Los efectos del choque sobre la morosidad reducen la rentabilidad de los bancos, causando así, una disminución en el ROA y el ROE. El primero pasa de 2,5 % antes del choque a -0,6 % seis trimestres después; mientras que el segundo exhibe una caída de 25,3 pp, al pasar de 19,1 % a -6,1 % en el período referenciado.

En el Gráfico 8 se evidencia el efecto del escenario adverso sobre el IEFI. Como se puede observar, una choque a la dinámica de las variables económicas ocasiona un deterioro de los indicadores de riesgo y de rentabilidad de los bancos, lo cual va en detrimento de la estabilidad del sistema financiero. Resulta importante resaltar que a pesar de que el IEFI registra un incremento considerable, este no es tan severo

¹¹Como se mencionó el IEFI se construye utilizando la metodologías de componentes principales y agrupa el desempeño de variables de rentabilidad (ROA y ROE), morosidad (IM y Cartera Improductiva) y liquidez (RPNC, entre otros). Para la construcción del IEFI estresado se utilizaron como insumos las variables de rentabilidad y morosidad estresadas, no se tuvieron en cuenta los efectos del choque sobre variables de liquidez sin embargo la ponderación de estas variables en el IEFI es baja (menor al 10 %)

GRÁFICO 6: Escenarios de estrés



Fuente: Cabrera et al. (2012).

como el observado durante la crisis de finales de los noventa. Esto podría ser explicado porque este ejercicio solo evalúa los efectos que tiene el choque sobre el riesgo de crédito, *ceteris paribus*¹².

Una vez calculado el IEFI estresado para cada banco se realizó la estimación de los indicadores de impacto sistémico asumiendo un sistema financiero compuesto por estas entidades (16 bancos). Con el fin de tener un escenario base que permita hacer comparaciones, se estimaron los indicadores con el IEFI a diciembre de 2011 para estas 16 entidades.

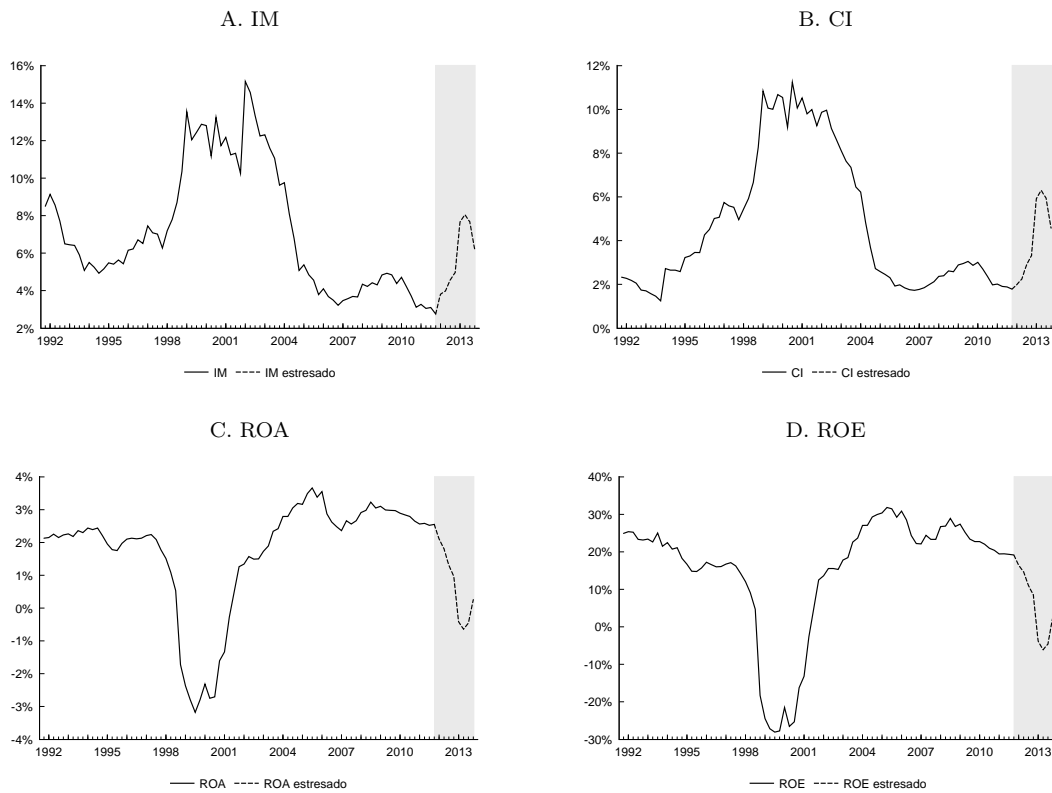
En los Cuadros 10 y 11 se muestran los resultados de los indicadores de impacto sistémico calculados en el escenario base y en el escenario estresado, utilizando la metodología del cuantil fijo y regresión por cuantiles en cada caso. El choque tiene efectos diferenciados entre entidades pues el aumento en cartera vencida y la reducción en la rentabilidad será mayor para las entidades con mayor exposición al riesgo de crédito y adicionalmente, la ponderación de variables de morosidad y rentabilidad varía entre entidades.

Se encontró que existen entidades que después del choque empeoran sus indicadores de importancia sistémica y a la vez algunas que muestran mejoras. En particular los *Bancos 5, 6, 11 y 14* tendrían aumentos relevantes en sus indicadores de importancia sistémica mientras que para los *Bancos 7, 3 y 12* disminuirían (10).

↑ ↓

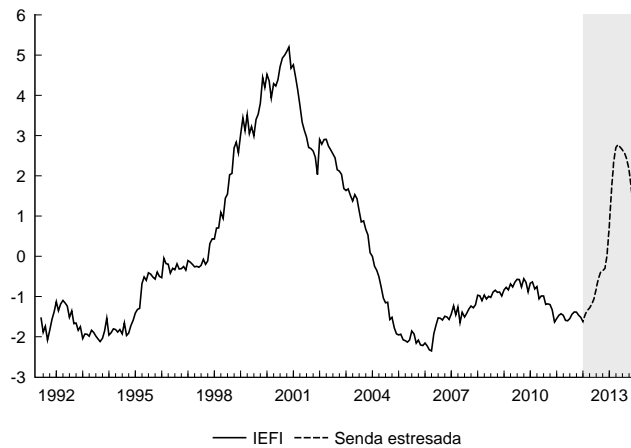
¹²Las variables relacionadas con la liquidez y el margen de intermediación se dejan constantes durante el período de estrés.

GRÁFICO 7: Efectos del choque en los indicadores de los bancos



Fuente: Cabrera et al. (2012), cálculos de los autores.

GRÁFICO 8: Iefi estresado



Fuente: cálculos de los autores.

Al analizar entidad por entidad se encuentran resultados muy interesantes que son de gran utilidad al momento de pensar en regulación microprudencial. Estas estimaciones muestran cuáles entidades son más

CUADRO 10: Medidas de Impacto Sistémico - Cuantil p=10,5 %

	Escenario Base				Escenario Estresado		
	SII	VI	PAO		SII	VI	PAO
<i>Banco 1</i>	8,3	23,6 %	100 %	<i>Banco 1</i>	8,2 ↓	24,5 %	100 %
<i>Banco 2</i>	5,4	17,6 %	69,2 %	<i>Banco 2</i>	5,3 ↓	17,4 %	64,9 %
<i>Banco 3</i>	5,2	19,2 %	76,9 %	<i>Banco 3</i>	5,0 ↓	16,6 %	61,3 %
<i>Banco 4</i>	9,0	23,6 %	100 %	<i>Banco 4</i>	9,1 ↑	24,5 %	100 %
<i>Banco 5</i>	1,1	5,5 %	19 %	<i>Banco 5</i>	3,8 ↑	8,8 %	29,7 %
<i>Banco 6</i>	9,0	23,6 %	100 %	<i>Banco 6</i>	9,4 ↑	24,5 %	100 %
<i>Banco 7</i>	8,2	23,6 %	100 %	<i>Banco 7</i>	7,6 ↓	23,2 %	93 %
<i>Banco 8</i>	9,1	23,6 %	100 %	<i>Banco 8</i>	8,6 ↓	24,5 %	100 %
<i>Banco 9</i>	7,2	23,6 %	100 %	<i>Banco 9</i>	7,9 ↑	24,5 %	100 %
<i>Banco 10</i>	8,0	23,6 %	100 %	<i>Banco 10</i>	8,5 ↑	24,5 %	100 %
<i>Banco 11</i>	6,1	22,2 %	92,3 %	<i>Banco 11</i>	8,5 ↓	23,2 %	93 %
<i>Banco 12</i>	8,5	23,6 %	100 %	<i>Banco 12</i>	7,4 ↓	24,5 %	100 %
<i>Banco 13</i>	5,8	22,2 %	92,3 %	<i>Banco 13</i>	6,5 ↑	24,5 %	100 %
<i>Banco 14</i>	6,4	23,6 %	100 %	<i>Banco 14</i>	6,5 ↑	23,2 %	93 %
<i>Banco 15</i>	6,4	21,4 %	88,4 %	<i>Banco 15</i>	6,9 ↑	19,7 %	75,4 %
<i>Banco 16</i>	7,6	23,6 %	100 %	<i>Banco 16</i>	8,2 ↑	24,5 %	100 %

Fuente: cálculos de los autores.

CUADRO 11: Medidas de Impacto Sistémico - Regresión por cuantiles p=10 %

	Escenario Base				Escenario Estresado		
	SII	VI	PAO		SII	VI	PAO
<i>Banco 1</i>	2,9	13,1 %	91,9 %	<i>Banco 1</i>	3,1 ↑	13,0 %	92,6 %
<i>Banco 2</i>	1,8	11,5 %	79,7 %	<i>Banco 2</i>	2,1 ↑	10,2 %	70,4 %
<i>Banco 3</i>	2,5	12,0 %	83,7 %	<i>Banco 3</i>	2,0 ↑	12,1 %	85,2 %
<i>Banco 4</i>	3,0	12,6 %	87,8 %	<i>Banco 4</i>	3,1 ↑	12,6 %	88,9 %
<i>Banco 5</i>	1,8	9,4 %	63,4 %	<i>Banco 5</i>	2,2 ↑	10,2 %	70,4 %
<i>Banco 6</i>	2,2	12,6 %	87,8 %	<i>Banco 6</i>	3,0 ↑	12,6 %	88,9 %
<i>Banco 7</i>	2,3	13,1 %	91,9 %	<i>Banco 7</i>	2,2 ↓	13,0 %	92,6 %
<i>Banco 8</i>	2,9	12,6 %	87,8 %	<i>Banco 8</i>	2,9 ↔	12,6 %	88,9 %
<i>Banco 9</i>	2,1	12,0 %	83,7 %	<i>Banco 9</i>	2,7 ↑	12,1 %	85,2 %
<i>Banco 10</i>	1,7	12,0 %	83,7 %	<i>Banco 10</i>	2,3 ↑	11,6 %	81,5 %
<i>Banco 11</i>	2,3	12,0 %	83,7 %	<i>Banco 11</i>	2,5 ↑	12,6 %	88,9 %
<i>Banco 12</i>	2,8	13,1 %	91,9 %	<i>Banco 12</i>	1,7 ↓	7,2 %	48,1 %
<i>Banco 13</i>	2,5	12,6 %	87,8 %	<i>Banco 13</i>	2,2 ↓	11,2 %	77,8 %
<i>Banco 14</i>	1,9	10,5 %	71,5 %	<i>Banco 14</i>	3,1 ↑	13,0 %	92,6 %
<i>Banco 15</i>	2,6	12,0 %	83,7 %	<i>Banco 15</i>	2,1 ↓	9,7 %	66,7 %
<i>Banco 16</i>	2,8	12,6 %	87,8 %	<i>Banco 16</i>	2,8 ↔	12,6 %	88,9 %

Fuente: cálculos de los autores.

propensas a enfrentar aumentos en sus indicadores de impacto sistémico dado sus condiciones actuales. Es importante resaltar que las entidades que mostraron mayores aumentos en sus indicadores de importancia sistémica no son entidades que participen mayoritariamente en cartera, activos o patrimonio a diciembre de 2011, es decir, no son entidades que se tengan en el radar por su tamaño (Cuadro 2).

5. Conclusiones

Si bien hace un tiempo la supervisión del sistema financiero se enfocaba en hacer un monitoreo a cada entidad individualmente, hoy en día los reguladores y supervisores reconocen la importancia de monitorear las interacciones entre entidades y los riesgos que estas generan. En este orden de ideas es de

gran importancia estudiar no solo el riesgo de que alguna entidad esté en una situación de fragilidad, sino además las implicaciones que esta situación tendría sobre el resto del sistema.

En este trabajo se estimaron tres indicadores que cuantifican el impacto que tendría sobre el sistema financiero un evento de fragilidad de alguna entidad. Adicionalmente, se estudió si estas medidas están o no correlacionadas con variables de tamaño en el sistema e interconexión en el mercado interbancario. Se encontró que existe una relación positiva y, en algunos casos, significativa entre variables de tamaño e importancia sistémica. En particular, el indicador que mide la severidad de la insolvencia de alguna entidad está correlacionado con medidas de tamaño. Sin embargo, no hay evidencia estadística de que la importancia sistémica esté relacionada con la interconexión de las entidades en el interbancario. En particular, las medidas construidas ayudan a identificar entidades con altos niveles de importancia sistémica que las medidas de tamaño e interconexión no logran capturar. Lo anterior sugiere que mediciones de impacto sistémico basadas en interconexión en el interbancario pueden no ser suficientes para evaluar el riesgo sistémico en el sistema financiero colombiano.

Al estimar los efectos de un choque macroeconómico sobre los indicadores de importancia sistémica se encuentra que las entidades que, dado sus condiciones actuales, tendrían aumentos importantes en sus indicadores no pueden identificarse necesariamente como entidades grandes o interconectadas en el interbancario.

En conclusión, al revisar los resultados de los indicadores calculados con información histórica y los resultantes del ejercicio de estrés, se encuentra que para evaluar la importancia sistémica de los establecimientos de crédito no es suficiente hacer un seguimiento a las entidades grandes e interconectadas en el interbancario. Por esto sería interesante, para futuras investigaciones, considerar otro tipo de variables que permitan caracterizar las vías por medio de las que este riesgo se transmite y que caractericen entidades sistémicas. Adicionalmente, podría resultar relevante estimar los indicadores de riesgo sistémico teniendo en cuenta otro tipo de entidades financieras como compañías de seguros, fondos de pensiones y comisionistas de bolsa, entre otras. Para esto es necesario encontrar indicadores de desempeño que puedan aplicarse a todas estas entidades. Por último, puede estudiarse más a fondo si hay formas mejores de caracterizar los escenarios de estrés de las entidades pues este supuesto es determinante en los resultado del ejercicio.

Referencias

- Adrian, T. & Brunnermeier, M. (2011), ‘Covar’, *Federal Reserve Bank of New York Staff Report* (348).
- Arias, M., Mendoza, J. & Pérez-Reyna, D. (2010), ‘Applying covar to measure systemic market risk: The colombian case’, *Temas de Estabilidad Financiera, Banco de la República* .
- Bernanke, B. (2009), ‘Financial reform to address systemic risk’, *Discurso en el Council on Foreign Relations* .
- Cabrera, W., Gutiérrez Rueda, J. & Mendoza, J. (2012), ‘Stress testing para el riesgo de crédito: un ejercicio para la banca en colombia’, *Mimeo* .
- Hamilton, J. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton.
- Hann, L. & Ferreira, A. (2006), ‘Extreme value theory: An introduction’, *Springer* .
- Herring, R. (2011), ‘The central role of resolution policy in dealing with systemically important financial institutions’, *Consultado en <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/11/11-71.pdf>* .
- Huang, X. (1992), Statistics of Bivariate Extreme Values, Ph.d. thesis , no 22, Tinbergen Institute Research Series, Erasmus University, Rotterdam, Holanda.
- Koenker, R. & Bassett, G. (1978), ‘Regression quantiles’, *Econometrica* **46**(1), 33–50.
- Morales, M. & Estrada, D. (2010), ‘A financial stability index for colombia’, *Springer* **6**(4), 555–581.
- Márquez, J. & Serafin-Martínez, S. (2009), ‘A network model of systemic risk: stress testing the banking system1’, *Intelligent Systems in Accounting, Finance & Management* **16**(1-2), 87–110.
- Saade Ospina, A. (2010), ‘Estructura de red del mercado electrónico colombiano (mec) e identificación de agentes sistémicos según criterios de centralidad’, *Banco de la Republica, Temas de Estabilidad Financiera* .
- Segoviano, M. & Goodhart, C. (2009), ‘Banking stability measures’, *IMF Working Paper* .
- Tsomocos, D. (2003), ‘Equilibrium analysis, banking and financial instability’, *Journal of Mathematical Economics* **39**.
- Zhou, C. (2010), ‘Are banks too big to fail? measuring systemic importance of financial institutions’, *Nederlandsche Bank and Erasmus University* .

Apéndice A. Apéndice

Demstración de la Proposición 1.

Demstración. De la definición 5 tenemos que

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_d) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P(X_1 > VaR_i(px_1)) \circ \dots \circ X_d > VaR_d(px_d)}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - P(X_1 < VaR_1(px_1), \dots, X_d < VaR_d(px_d))}{p}. \end{aligned}$$

Ahora, si F es la función de probabilidad conjunta de (X_1, \dots, X_d) entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 < VaR_1(px_1), \dots, X_d < VaR_d(px_d)) &= F(VaR_1(px_1), \dots, VaR_d(px_d)) \\ &= C(1 - px_1, \dots, 1 - px_d). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene utilizando la definición 1 y la ecuación 7.

Combinando los resultados anteriores obtenemos que

$$L(x_1, \dots, x_d) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - C(1 - px_1, \dots, 1 - px_d)}{p}. \quad (14)$$

□

Demostración de la Proposición 2.

Demostración. Utilizando la definición de PAO_i y la Ley de Bayes tenemos que

$$\begin{aligned} PAO_i &= \lim_{p \rightarrow 0} PAO_i(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} P\{\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p) \mid X_i > VaR_i(p)\} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P\{\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p) \cap X_i > VaR_i(p)\}}{P(X_i > VaR_i(p))} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P\{\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p) \cap X_i > VaR_i(p)\}}{p}. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho de que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ tenemos que

$$\begin{aligned} PAO_i &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + P(\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p))}{p} \\ &\quad - \frac{P\{\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p) \cup X_i > VaR_i(p)\}}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} 1 + L_{\neq i}(1, \dots, 1) - L(1, \dots, 1). \end{aligned}$$

□

Demostración de la Proposición 3.

Demostración. Utilizando la definición de $VI_i(p)$ y la Ley de Bayes tenemos que

$$\begin{aligned} VI_i &= \lim_{p \rightarrow 0} VI_i(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} P\{X_i > VaR_i(p) \mid \exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p)\} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{P\{X_i > VaR_i(p) \cap \exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p)\}}{P(\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p))}. \end{aligned}$$

De forma análoga a la prueba anterior,

$$\begin{aligned} VI_i &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + P(\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p))}{P(\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p))} \\ &\quad - \frac{P\{\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p) \cup X_i > VaR_i(p)\}}{P(\exists j \neq i \text{ tq } X_j > VaR_j(p))}. \end{aligned}$$

El primer sumando de la expresión anterior es igual a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 + L_{\neq i}(1, \dots, 1)}{L_{\neq i}(1, \dots, 1)},$$

mientras que si se multiplica y divide el segundo sumando en p se obtiene que este es igual a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{-L(1, \dots, 1)}{L_{\neq i}(1, \dots, 1)}.$$

En conclusión,

$$VI_i = \frac{L_{\neq i}(1, \dots, 1) + 1 - L(1, \dots, 1)}{L_{\neq i}(1, \dots, 1)}.$$

□

Demostración del Corolario 1.

Demostración. Esta demostración se tomo de Zhou (2010). Suponga que $PAO_i > PAO_j$, esto ocurre ssi $L_{\neq i}(1, \dots, 1) > L_{\neq j}(1, \dots, 1)$. Ahora, dado que $L(1, \dots, 1) > 1$ entonces lo anterior implica que

$$\begin{aligned} \frac{L(1, \dots, 1) - 1}{L_{\neq j}(1, \dots, 1)} &> \frac{L(1, \dots, 1) - 1}{L_{\neq i}(1, \dots, 1)} \quad \text{ssi} \\ 1 - \frac{L(1, \dots, 1) - 1}{L_{\neq i}(1, \dots, 1)} &> 1 - \frac{L(1, \dots, 1) - 1}{L_{\neq j}(1, \dots, 1)} \quad \text{ssi} \end{aligned}$$

$$VI_i > VI_j.$$

□

Demostración de la Proposición 4.

Demostración. Utilizando la definición de SII_i y la del valor esperado tenemos que

$$\begin{aligned}
SII_i &= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{i=1}^d E(1_{X_j > VaR_j(p)} | X_i > VaR_i(p)) \\
&= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^d P(X_j > VaR_j(p) | X_i > VaR_i(p)) \quad \text{por Bayes esto implica que} \\
&= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^d \frac{P(X_j > VaR_j(p) \cap X_i > VaR_i(p))}{p} \\
&= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{j=1}^d \frac{2p - P(X_j > VaR_j(p) \cup X_i > VaR_i(p))}{p} \\
&= \sum_{j=1}^d (2 - L_{ij}(1, 1)).
\end{aligned}$$

□

Apéndice B. Apéndice

Para asegurarse de que el proceso $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{dt})$, donde t recorre el tiempo, es estacionario, se estimó un $VAR(1)$ para las variables¹³.

Con el objetivo de garantizar que los supuestos del VAR se cumplen, es necesario mostrar que el IEFI por entidad tiene primer y segundo momento constante. Para esto, se realizaron pruebas de raíz unitaria a cada una de las series. El Cuadro 12 presenta los resultados de estas pruebas. Al analizar los resultados es posible rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria conjunta e individual, lo que indica que las series del IEFI son estacionarias.

CUADRO 12: Pruebas de raíz unitaria

Método	Estadístico	P-value	Secciones	Observaciones
Nula: raíz unitaria conjunta*				
Levin, Lin & Chu	-8.798	0.000	25	6100
Nula: raíz unitaria individual**				
ADF	159.07	0.000	25	6100
PP	169.90	0.000	25	6126

* Asume un proceso de raíz unitaria conjunta.

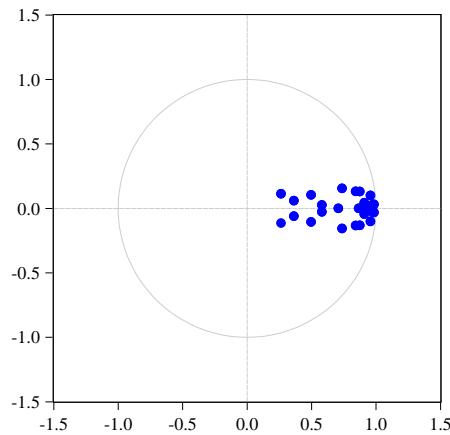
** Asume un proceso de raíz unitaria individual.

Fuente: cálculo de los autores.

Después de estimado el VAR, y siguiendo los resultados expuestos por Hamilton (1994), el proceso \mathbf{X}_t es estacionario siempre que las raíces del polinomio característico del mismo sean menores a uno en valor absoluto. La Gráfico 9 muestra que las raíces del polinomio se encuentran dentro del círculo unitario por lo que es posible afirmar que el proceso es estacionario en covarianza.

¹³Se escogió esta estructura de rezagos utilizando los criterios de selección de rezagos de Hannan-Quinn (HQ), Schwarz (SC) y Final Predictor Error (FPE).

GRÁFICO 9: Prueba de estacionalidad (Inverse Roots of AR Characteristic Polynomial)



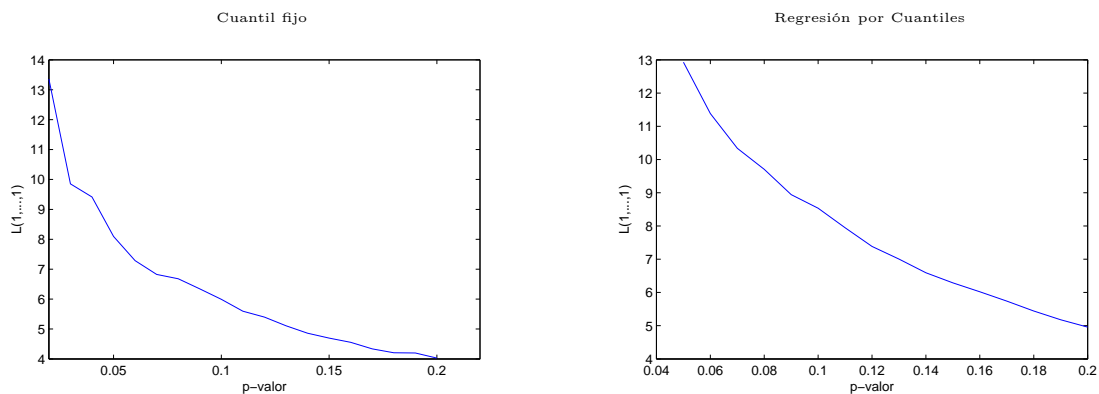
Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos Banco de la República.

Apéndice C. Apéndice

En este apéndice se expondrán los criterios utilizados para la escogencia de p en cada una de las estimaciones realizadas de los indicadores de importancia sistémica. Como se mencionó es importante escoger un valor de p que haga que la función L varíe poco y adicionalmente que sea tan pequeño como sea posible.

Para esto, se calculó la función $L(1, \dots, 1)$ para diferentes valores p . La Gráfico 10 muestra la relación entre estas en el caso en el que se estimó el $Var_i(p)$ por medio de regresión por cuantiles y para el cuantil fijo. Cuando se considera el cuantil fijo, se escogió el valor de p igual a 7,5 % mientras que para el caso de la regresión por cuantiles se tomó igual a 10 %. Adicionalmente, se tomó en cuenta lo que Zhou consideró un valor razonable. De acuerdo a sus resultados, el valor de p debe ser menor a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Para su muestra de 276 datos él escogió el valor de p igual a 7,2 %, que es cercano a los valores escogidos en este trabajo. Adicionalmente, cuando trabajó con una muestra de 6.000 datos tomó p igual a 3 % y para una de 2000 observaciones 5 %.

GRÁFICO 10: Escogencia de p



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos Banco de la República.

Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia, cálculos Banco de la República.