# ENSAYOS

sobre política económica


## *Acumulación de capital humano y gasto público en educación: un modelo de generaciones traslapadas para Colombia*


Oliver Pardo



Revista ESPE, núm. 52, diciembre 2006
Páginas 12-47

***Human Capital Accumulation and Public Financing of Education: an Overlapping Generations Model for Colombia***

Oliver Pardo [*]

This article was financed by *Proyecto de modernización de la administración financiera del sector público II* (MAFP II). I'm grateful to researchers at Direction of Economic Studies in the National Planning Department and two anonymous referees for suggestions and comments. The views expressed are those of the author and do not compromise the National Planning Department.

[*] National Planning Department, Direction of Economic Studies; E-mail: opardo@dnp.gov.co

Document received: 17 April 2006; final version accepted: 8 November 2006.

## Abstract

*This paper studies the effect of public financing of education on economic growth and welfare. It develops an overlapping generations model with endogenous growth where agents educate themselves to accumulate human capital and the government subsidizes a fraction of education expenditure. Parameters are calibrated to replicate some stylized facts of the Colombian economy. Simulations suggest that an increase in public expenditure on education of 1 percentage point of the GDP leads to an increase of 0.14 percentage points in the long run economic growth rate.*

**JEL Classification:** D58, H52, I28, O41.

**Keywords:** *human capital, growth, public financing of education, Colombia.*

# *Acumulación de capital humano y gasto público en educación: un modelo de generaciones traslapadas para Colombia*

Oliver Pardo *

*En el presente documento se estudia el impacto del gasto público en educación sobre el crecimiento económico y el bienestar, para lo cual se construye un modelo de generaciones traslapadas y crecimiento endógeno. Los agentes se educan con el fin de acumular capital humano, mientras el gobierno subsidia una fracción del gasto en educación. Los parámetros son calibrados para replicar algunos hechos estilizados de la economía colombiana. Las simulaciones sugieren que un incremento del gasto público en educación equivalente al 1% del producto interno bruto (PIB) implica un aumento de 0,14 puntos porcentuales en la tasa de crecimiento económico de largo plazo.*

---

Este artículo fue financiado por el *Proyecto de modernización de la administración financiera del sector público II* (MAFP II). Se agradece a los investigadores de la Dirección de Estudios Económicos del Departamento Nacional de Planeación y a dos evaluadores anónimos por los comentarios y sugerencias. Las opiniones son responsabilidad de su autor y no comprometen al Departamento Nacional de Planeación.

* Departamento Nacional de Planeación, correo electrónico: opardo@dnp.gov.co

Documento recibido el 17 de abril de 2006; versión final aceptada el 8 de noviembre de 2006.

**Clasificación JEL:** D58, H52, I28, O41.

**Palabras clave:** *capital humano, crecimiento, financiación pública de la educación, Colombia.*

## I. INTRODUCCIÓN

Las herramientas para la evaluación cuantitativa del impacto macroeconómico del gasto público en educación son escasas o inexistentes para el caso colombiano. En el presente documento se pretende subsanar esta deficiencia mediante la formulación de un modelo de equilibrio general dinámico y su calibración para Colombia.

El impacto teórico de la educación sobre el crecimiento económico ha sido ampliamente analizado por la literatura de crecimiento endógeno, en cuyos modelos el canal principal a través del cual la educación se traduce en crecimiento es la acumulación de capital humano. Este concepto incluye más que el logro educativo de las personas, pero sin duda la educación es uno de sus elementos centrales.

Los modelos de generaciones traslapadas (OLG, por su sigla en inglés) constituyen una herramienta ideal para el análisis del gasto en educación y la interacción entre capital humano y crecimiento. Su amplia utilización obedece, en primer lugar, al carácter dinámico de la acumulación de capital humano: la mayoría de los beneficios de la capacitación, en términos de bienestar y producto, aparecen sólo cuando los individuos han finalizado su proceso educativo y se convierten en parte de una fuerza laboral más calificada. En segundo lugar, para obtener los recursos que financian la educación pública de niños y jóvenes se gravan los ingresos y el consumo de los adultos; así, la financiación pública de la educación equivale a una transferencia intergeneracional.

El modelo OLG que se presenta a continuación tiene como objetivo una evaluación cuantitativa del impacto del gasto público en educación sobre el bienestar y el crecimiento para el caso colombiano. Por gasto público en educación se entiende a los bienes y servicios que sirven de apoyo al estudio (libros, computadores, aulas, servicios docentes) y cuya adquisición es subsidiada parcial o totalmente por el Estado, bien sea a través de su provisión directa (escuelas públicas) o de subsidios a la demanda (becas).

Los modelos tradicionales de crecimiento endógeno y acumulación de capital humano como los de Lucas (1988) y Azariadis y Drazen (1990) definen la acumulación de capital humano a través de una ecuación en diferencia, similar a la siguiente:

(1) $h_{t+1} = f\,(h_t,\ u_t)$

Donde *h* representa el *stock* de capital humano, y *u* alguna medida del esfuerzo que el individuo dedica a capacitarse. Los modelos de crecimiento que estudian el efecto del gasto público en educación incluyen dentro de la anterior función otro insumo *g*, que representa el gasto público en educación:

(2) $h_{t+1} = f(h_t, u_t,\ g_t)$

Dentro de este tipo de modelos encontramos a Glomm y Ravikumar (1992), quienes estudian la interacción entre crecimiento, gasto público y distribución del ingreso; Bénabou (1999), quien intenta determinar las políticas redistributivas que maximizan el bienestar y el crecimiento para la economía de los Estados Unidos; y Boldrin (1993) y Soares (2003), quienes explican la financiación pública de la educación como resultado de un equilibrio político-económico sin recurrir a la existencia de altruismo. El modelo que se presenta a continuación sigue la línea de estos trabajos.

Existen dos sectores: uno en donde se producen bienes y servicios y otro en donde se produce capital humano. Los agentes se educan con el fin de acumular capital humano y obtener mayores ingresos laborales, mientras el gasto público en educación es uno de los insumos en el proceso de dicha acumulación.

En vez de trabajar en un contexto donde los agentes viven durante dos períodos, en este modelo los agentes viven un número arbitrario de períodos, lo cual permite simular de mejor forma el comportamiento de los agentes a lo largo de su ciclo de vida: al principio se educan, luego hacen parte de la fuerza laboral y finalmente se retiran. El momento cuando finaliza el período educativo es determinado endógenamente, lo que permite realizar un análisis teórico y una aproximación cuantitativa sobre el efecto del gasto público en educación sobre el logro educativo de los individuos.

El plan del resto del documento es el siguiente: en la segunda sección se describe formalmente el modelo; en la tercera, se especifican las condiciones de equilibrio; en la siguiente se caracteriza el estado estacionario; en la quinta se calibra el modelo para Colombia; en la sexta se realizan algunos ejercicios de simulación, centrando la atención sobre el efecto del gasto público en el crecimiento, el bienestar y los años promedio de escolaridad; en la parte final se presentan algunas conclusiones, y en los anexos se detallan algunos procedimientos matemáticos y computacionales.

## II. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Cada generación está constituida por un agente representativo, cuya utilidad depende exclusivamente de la trayectoria del consumo, por lo cual se supone que el ocio no brinda bienestar. Para acumular capital humano debe destinarse parte del tiempo al estudio y parte del ingreso al gasto en educación, gasto que es subsidiado parcialmente por el gobierno, el cual cobra unos impuestos sobre los ingresos. Las firmas contratan capital humano y capital físico con el fin de producir un bien que puede tener como destino el consumo, el ahorro o el gasto en educación.

### *A. AGENTE REPRESENTATIVO*

El agente representativo deriva una utilidad instantánea del consumo en cada instante del tiempo. Para todos los agentes existe un retiro forzoso que se inicia al final de la edad $T$. El agente vive hasta la edad $T + T^R$.

Sea $c_t^z$ el consumo del agente de edad $z$ en el momento $t$ (a lo largo del documento el superíndice de las variables específica la edad del individuo y el subíndice el momento en el tiempo; la notación de las variables y de los parámetros se presenta en el Anexo 3). Se supone que la utilidad instantánea es una función con aversión relativa al riesgo constante e igual a $\sigma$. El ciclo de vida del agente va desde $z = 1$ hasta $z = T + T^R$. El objetivo del agente representativo es maximizar la suma de la utilidad instantánea descontada por el factor $\beta$:

$$(3) \qquad \sum_{z=1}^{T+T^R} \beta^{z-1} \frac{(c_{t+z-1}^z)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Para cada instante del tiempo $t$ se supone que el agente representativo con una edad $z$ menor o igual a $T$ destina una fracción de tiempo $u_t^z$ a estudiar y otra (1- $u_t^z$) a trabajar:

(4) $0 \leq u_t^z \leq 1$

Sea $w_t$ el salario por unidad de eficiencia tomando como numerario el precio del bien de consumo. Si $h_t^z$ representa el *stock* de capital humano del agente de edad $z$ en el momento $t$, sus ingresos laborales antes de impuestos serían $(1- u_t^z)\ w_t\ h_t^z$.

Los activos financieros del agente de edad $z$ al inicio del período $t$ se representan por $k_t^z$. Al inicio del ciclo de vida el agente no cuenta con activos financieros, por lo cual $k_t^1 = 0$ para todo $t$. Dado que no existe altruismo, como tampoco herencias voluntarias, se tiene que: $k_t^{T+T^R+1} = 0$.

Sean $\tau_t$ la tarifa impositiva sobre los ingresos y $r_t$ la tasa de interés. Los ingresos netos de impuestos de los agentes con una edad $z$ menor o igual a $T$ serían: $(1 - \tau_t)$ $[(1 - u_t^z)\ w_t\ h_t^z + r_t\ k_t^z]$, mientras los ingresos de los agentes con una edad $z$ mayor a $T$ serían: $(1 - \tau_t)\ r_t\ k_t^z$.

El ingreso de los agentes puede tener como destino el consumo, el ahorro o el gasto en educación. El gobierno subsidia una fracción $\pi_t$ de los costos directos de la educación. Sea $\varepsilon_t^z$ el gasto en educación del agente de edad $z$ en el momento $t$. Por lo tanto la restricción presupuestaria del agente con una edad menor a la del retiro forzoso viene dada por

(5) $c_t^z + (1 - \pi_t)\ \varepsilon_t^z + k_{t+1}^{z+1} - k_t^z \leq (1 - \tau_t)\ [(1 - u_t^z)\ w_t\ h_t^z + r_t\ k_t^z\ ]$

mientras que la restricción presupuestaria de los agentes retirados viene dada por

(6) $c_t^z + k_{t+1}^{z+1} - k_t^z \leq (1 - \tau_t)\ r_t\ k_t^z$

El incentivo para dedicar tiempo al estudio y destinar parte del ingreso al gasto en educación consiste en aumentar el *stock* de capital humano y así obtener mayores ingresos durante el período de vida laboral. Se supone que una función Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala especifica la tecnología mediante la cual se acumula capital humano. Sus insumos son la fracción de capital humano destinado al estudio y el gasto en educación que realiza el agente representativo:

(7) $h_{t+1}^{z+1} - h_t^z = B(u_t^z\ h_t^z)^{\theta}\ (\varepsilon_t^z)^{1-\theta}$

donde $B$ es un parámetro de escala y $\theta$ es un parámetro de participación.

## *B. CAPITAL HUMANO INICIAL*

El modelo supone que el agente representativo nacido en $t$ hereda una fracción $\phi$ del capital humano que el agente representativo de edad $z'$ tiene en el momento $t$, por tanto: $h_t^1 = \phi h_t^{z'}$.

El supuesto sobre el carácter heredable del capital humano tiene dos implicaciones fundamentales: la primera consiste en la posibilidad de generar crecimiento endógeno, dado que se trata de un modelo donde los individuos viven un número finito de períodos y el crecimiento proviene de la acumulación de factores. Para que exista crecimiento endógeno mediante la acumulación de factores es necesario que la producción exhiba rendimientos no decrecientes en los factores susceptibles de acumulación; así, el capital humano es un factor susceptible de acumulación sólo si se transfiere a alguna generación más joven (D'Autume y Michel, 1994:469, y Lucas, 1988:19).

La segunda implicación consiste en que la transferencia de capital humano de una generación a otra, dada la ausencia de altruismo, genera una externalidad intergeneracional: dado que cada generación no tiene en cuenta el efecto positivo de acumular capital humano sobre las generaciones posteriores, su acumulación es ineficiente en ausencia de intervención pública.

## *C. FIRMAS*

Las posibilidades tecnológicas de la economía se describen mediante la siguiente función de producción neta de depreciación:

$$(8) \quad F(K_t, H_t) = A(K_t)^{\alpha}(H_t)^{1-\alpha} - \delta K_t$$

donde $K_t$ es el *stock* de capital físico agregado; $H_t$ es *stock* de capital humano agregado destinado a la producción de bienes y servicios; $\delta$ es la tasa de depreciación del capital físico; $A$ es un parámetro de escala, y $\alpha$ es un parámetro de participación.

### *D. POBLACIÓN*

Sea $\mu_t^z$ el tamaño de la población de edad $z$ en el momento $t$. Suponiendo que la tasa de crecimiento de la población es constante e igual a $n$, se tiene que: $\mu_t^z = (1 + n)\, \mu_t^{z-1}$. El tamaño de una generación nacida en determinada fecha es constante a través del tiempo y, por tanto: $\mu_t^z = \mu_{t-z+1}^1$.

### *E. GOBIERNO*

El gobierno utiliza los ingresos tributarios con el único fin de financiar la educación; adicionalmente, se supone que para cada instante del tiempo los ingresos del gobierno son iguales a sus gastos, por ende, su restricción presupuestaria vendría dada por:

$$\tau_t[w_t \sum_{z=1}^{T} \mu_t^z(1 - u_t^z)\, h_t^z + r_t \sum_{z=1}^{T} \mu_t^z k_t^z] = \pi_t \sum_{z=1}^{T} \mu_t^z \varepsilon_t^z \tag{9}$$

La tasa impositiva se ajusta endógenamente con el fin de mantener el equilibrio presupuestario.

## III. CONDICIONES DE EQUILIBRIO

La siguiente representación recursiva del equilibrio sigue a Heer y Maussner (2005). Sean $H_t$ y $K_t$ los niveles agregados de capital físico y capital humano destinados a la producción de bienes y servicios, y sea $V^z(h_t^z, k_t^z, H_t, K_t)$ el valor de la función objetivo de un agente de edad $z$ con una riqueza financiera igual a $k_t^z$ y un capital humano igual a $h_t^z$:

$$V^z(h_t^z, k_t^z, K_t, H_t) = \begin{cases} \max\limits_{c_t^z, u_t^z, \varepsilon_t^z, k_{t+1}^{z+1}, h_{t+1}^{z+1}} \dfrac{(c_t^z)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta V^{z+1}(h_{t+1}^{z+1}, k_{t+1}^{z+1}, K_{t+1}, H_{t+1}) \\ \quad \text{s. a. (4), (5) y (7),} \qquad \text{para } z = 1, \dots, T \\ \max\limits_{c_t^z, k_{t+1}^{z+1}, h_{t+1}^{z+1}} \dfrac{(c_t^z)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta V^{z+1}(h_{t+1}^{z+1}, k_{t+1}^{z+1}, K_{t+1}, H_{t+1}) \\ \quad \text{s. a. (6),} \qquad \text{para } z = T+1, \dots, T+T^R-1 \\ \max\limits_{c_t^{T+T^R}, k_{t+1}^{T+T^R+1}} \dfrac{(c_t^{T+T^R})^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad \text{s. a. (6) y para } k_{t+1}^{T+T^R+1} \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

La función valor depende de las variables agregadas $H_t$ y $K_t$, pues éstas determinan el salario por unidad de eficiencia $w_t$ y la tasa de interés real $r_t$; así mismo, dicha función depende del parámetro de política $\pi_t$ y de la tasa impositiva $\tau_t$.

Para una trayectoria de $\pi_t$ y unas distribuciones iniciales de capital humano y de activos financieros $\{k_0^z, h_0^z\}_{z=1}^{T+T^R}$, un equilibrio se define como una colección de reglas de política: $c^z(k_t^z, h_t^z, H_t, K_t)$, $u^z(k_t^z, h_t^z, H_t, K_t)$, $\varepsilon^z(k_t^z, h_t^z, H_t, K_t)$, $h^{z+1}(k_t^z, h_t^z, H_t, K_t)$, $k^{z+1}(k_t^z, h_t^z, H_t, K_t)$; una sucesión de precios relativos: $\{w_t, r_t\}$, y una tasa impositiva: $\{\tau_t\}$, tales que para todo $t$:

1. Los factores son remunerados según su productividad marginal:

   (11) $$r_t = \alpha A(K_t)^{\alpha-1} (H_t)^{1-\alpha} - \delta$$

   (12) $$w_t = (1 - \alpha) A(K_t)^{\alpha} (H_t)^{-\alpha}$$

2. Dada la política gubernamental $\pi_t$, la tasa impositiva $\tau_t$ iguala los ingresos y gastos del gobierno mediante la ecuación (9).

3. Dada la sucesión de precios $\{w_t, r_t\}$, la política gubernamental $\{\pi_t\}$ y la tasa impositiva $\{\tau_t\}$, las reglas de política $c^z(\cdot)$, $u^z(\cdot)$, $\varepsilon^z(\cdot)$, $h^{z+1}(\cdot)$ y $k^{z+1}(\cdot)$ constituyen una solución al problema de optimización dinámica (10).

4. La oferta de capital humano dedicado a la producción de bienes y servicios es igual a su demanda:

   (13) $$H_t = \sum_{z=1}^{T} \mu_t^z (1 - u_t^z) h_t^z$$

5. El *stock* agregado de capital físico es igual a la suma neta de activos financieros de los individuos:

   (14) $$K_t = \sum_{z=1}^{T+T^R} \mu_t^z k_t^z$$

6. El mercado de bienes de encuentra en equilibrio:

   (15) $$AK_t^{\alpha} H_t^{1-\alpha} = K_{t+1} - (1 - \delta) K_t + \sum_{z=1}^{T+T^R} \mu_t^z c_t^z + \sum_{z=1}^{T} \mu_t^z \varepsilon_t^z$$

## IV. CARACTERIZACIÓN DEL ESTADO ESTACIONARIO

Si el subsidio a la educación es constante e igual a $\pi$, el estado estacionario está caracterizado por una trayectoria donde la tasa impositiva y los precios de los factores son constantes y donde el capital físico y el capital humano crecen a una misma tasa. Esto garantiza que la solución para el agente representativo de cada generación, en relación con su capital humano inicial, sea la misma.

El problema del agente representativo puede solucionarse en dos etapas (Ben-Porath, 1967): en la primera, se maximiza el valor presente de los ingresos disponibles para consumo mediante la elección de trayectorias para la fracción de tiempo dedicada al estudio ($u_t^z$), el gasto en educación ($\varepsilon_t^z$) y el *stock* de capital humano ($h_t^z$); mientras que en la segunda, dadas unas trayectorias para el ingreso laboral y el gasto en educación, se definen trayectorias para el consumo ($c_t^z$) y el ahorro ($k_{t+1}^{z+1} - k_t^z$) con el fin de maximizar la utilidad.

### *A. MAXIMIZACIÓN DEL VALOR PRESENTE DE LOS INGRESOS*

Dados unos precios $w$ y $r$ y una tasa impositiva $\tau$, el problema de maximización del valor presente de los ingresos disponibles para el consumo, para el agente nacido en $t$, puede escribirse como:

$$(16) \qquad \max_{\{u_{t-1+z}^z,\, \varepsilon_{t-1+z}^z,\, h_{t-1+z+1}^{z+1}\}_{z=1}^T} \sum_{z=1}^{T} (1 + (1 - \tau)\, r)^{-(z-1)} \left[(1 - \tau)\, w(1 - u_{t-1+z}^z)\, h_{t-1+z}^z - (1 - \pi)\varepsilon_{t-1+z}^z\right]$$

s. a.

$$h_{t-1+z+1}^{z+1} - h_{t-1+z}^z = B(u_{t-1+z}^z\; h_{t-1+z}^z)^{\theta}\, (\varepsilon_{t-1+z}^z)^{1-\theta} \qquad \text{para } z = 1,\ldots, T$$

$$0 \leq u_{t-1+z}^z \leq 1 \qquad \text{para } z = 1,\ldots, T$$

En el Anexo 1 se desarrolla el problema y se muestra que su solución depende de la relación entre el beneficio marginal y el costo marginal de acumular capital humano: si a la edad $z$ el beneficio marginal es mayor (menor) al costo marginal, la solución para el agente implica la dedicación exclusiva al estudio (trabajo). Si para alguna edad el beneficio marginal es igual al costo marginal, el individuo es indiferente con respecto a la asignación del tiempo que se realice en ese momento.

A partir de la minimización del costo de acumular capital humano se obtiene que el costo marginal (*CM*) es una función de los precios de los insumos utilizados en el proceso de dicha acumulación y de parámetros tecnológicos:

$$(17) \quad CM = (1 / B)\,[(1 - \tau)w / \theta]^{\theta}\,[(1 - \pi) / (1 - \theta)]^{1-\theta}$$

De la ecuación (17) se observa que el costo marginal de estudiar es una función creciente del salario por unidad de eficiencia neto de impuestos y decreciente en la fracción del gasto en educación financiada por el gobierno. En el estado estacionario, el costo marginal de estudiar es independiente de $z$ y, por tanto, constante a lo largo del ciclo de vida.

En el instante anterior a la edad de retiro, el beneficio marginal de estudiar es 0 y, por consiguiente, la fracción de tiempo dedicado al estudio es 0. Utilizando este resultado se llega a que, mientras no se estudie, el beneficio marginal ($\lambda^z$) del capital humano a la edad $z < T$ es el flujo de salarios por unidad de eficiencia (netos de impuestos) desde $z + 1$ hasta $T$, traído a valor presente:

$$(18) \quad \lambda^z = \left[\frac{1 - [1 + (1 - \tau)\,r]^{-(T - z)}}{r}\right] w$$

Nótese que el beneficio marginal de acumular capital humano es decreciente en $z$: mientras más cerca se esté de la edad de retiro, menor es el lapso de tiempo durante el cual se reciben los retornos del capital humano. Si al inicio del ciclo de vida el beneficio marginal de acumular capital humano es mayor a su costo marginal, la solución para el individuo implica la dedicación exclusiva al estudio desde el inicio de su ciclo de vida hasta la edad donde el costo marginal es mayor o igual al beneficio marginal. Después de esa edad la decisión óptima implica la dedicación exclusiva al trabajo.

Dado que el aumento de la financiación pública reduce el costo marginal de acumular capital humano, mientras que el efecto parcial del gasto público sobre el beneficio marginal es nulo, el número de períodos destinados a la educación es no decreciente en $\pi$.

En la medida en que el costo marginal y la trayectoria del beneficio marginal a lo largo del ciclo de vida son independientes de $t$, en el estado estacionario se tiene que:

(19) $u^z_{t+s} = u^z_t \equiv u^z$ para todo $t$ y $s$

Si los intervalos de tiempo se definen como años, la especificación del modelo permite, entonces, asociar a $\sum_{z=1}^{T} u^z$ con los *años de escolaridad* (este resultado es utilizado en la sección V para calibrar el modelo).

El gasto en educación que realizan los individuos ($\varepsilon^z_t$) viene dado por la igualdad entre el beneficio marginal del gasto y su costo marginal (véase ecuación A2, en el Anexo 1):

(20) $\lambda^z B(1 - \theta)\,(h^z_t u^z)^{\theta}\,(\varepsilon^z_t)^{-\theta} = 1 - \pi$

Así mismo, la demanda de servicios educativos es una fracción creciente de $\pi$. Las ecuaciones (20) y (7) implican que la tasa de acumulación de capital humano a la edad $z$ ($\gamma^z$) viene dada por:

(21) $$\gamma^z \equiv \frac{h^{z+1}_{t+1} - h^z_t}{h^z_t} = B\left(\lambda^z \frac{B(1-\theta)}{1-\pi}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} u^z$$

Dado un *stock* de capital humano inicial, mediante la anterior ecuación se define la trayectoria para $h^z_t$. En el estado estacionario, $\gamma^z$ es independiente de la fecha de nacimiento. Manteniendo lo demás constante, esta tasa es creciente con respecto a $\pi$ para las edades donde $u^z > 0$; de esta forma, el efecto parcial de un aumento en el gasto público en educación es una mayor acumulación de capital humano.

## B. MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD

Dadas unas trayectorias para $u^z$, $\varepsilon^z_t$, y $h^z_t$, el problema de maximización de la utilidad consiste en

$$\max_{\{c^z_{t+1+z},\, k^{z+1}_{t-1+z+1}\}_{z=1}^{T+T^R}} \sum_{z=1}^{T+T^R} \beta^{z-1} \frac{(c^z_{t-1+z})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

sujeto a las ecuaciones (5) y (6), a las trayectorias de $u^z$, $\varepsilon_t^z$ y $h_t^z$ y a $k_t^1 = 0$. La solución está caracterizada por la condición de transversalidad ($k_t^{T+T^R+1} = 0$) y la condición de Euler: $c_{t+1}^{z+1} = [\beta(1 + (1 - \tau)\, r]^{(1/\sigma)} c_t^z$.

Las restricciones presupuestarias, la condición de Euler, la condición de transversalidad y las trayectorias de $u^z$, $\varepsilon_t^z$, y $h_t^z$ caracterizan la trayectoria óptima de consumo ($c_t^z$) y ahorro ($k_{t+1}^{z+1} - k_t^z$) del agente representativo.

## C. TASA DE CRECIMIENTO DEL PRODUCTO

En el estado estacionario la trayectoria de $\varepsilon_t^z$, $h_t^z$, $c_t^z$ y $k_t^z$ en relación con $h_t^1$ es igual para todas las generaciones; por tanto, debemos hallar la tasa de crecimiento de capital humano inicial de cada generación para encontrar la tasa de crecimiento de las demás variables.

La tasa de crecimiento entre el capital humano del agente de edad $z'$ en $t$ y el capital humano del agente de edad $z'$ en $t$ - ($z'$ - 1) se determina de la iteración de la ecuación (21) y la ecuación $h_t^1 = \phi\, h_t^{z'}$:

$$\text{(22)} \qquad \frac{h_t^{z'}}{h_{t-(z'-1)}^{z'}} = \phi \prod_{j=1}^{z'-1} [1 + \gamma^{z'-j}]$$

De forma que la tasa de crecimiento del capital humano inicial entre cada período ($\gamma$) viene dada por:

$$\text{(23)} \qquad \gamma \equiv \frac{h_{t+1}^1 - h_t^1}{h_t^1} = \left\{\phi \prod_{j=1}^{z'-1} [1 + \gamma^{z'-j}]\right\}^{\frac{1}{z'-1}} - 1$$

Dado que en el estado estacionario el consumo, el ahorro y el gasto en educación, como proporción del capital humano inicial, son constantes a través de cada nueva generación, en el estado estacionario se tiene que:

$$\text{(24)} \qquad c_{t+1}^z = (1 + \gamma)\, c_t^z$$

$$k_{t+1}^z = (1 + \gamma)\, k_t^z$$

$$\varepsilon_{t+1}^{z} = (1 + \gamma)\, \varepsilon_{t}^{z}$$

Finalmente, de las ecuaciones (13) y (14), el sistema de ecuaciones (24) y de $\mu_{t-z+1}^{1} = \mu_{t}^{z} = (1 + n)\, \mu_{t}^{z-1}$, se tiene la siguiente expresión para los niveles agregados de capital humano y físico, normalizados por el nivel agregado del capital humano inicial de la población de edad 1:

$$\frac{H_t}{\mu_t^1\, h_t^1} = \sum_{z=1}^{T} [(1 + n)(1 + \gamma)]^{-(z-1)} (1 - u^z) \frac{h_t^z}{h_{t+1-z}^1} \tag{25}$$

$$\frac{K_t}{\mu_t^1\, h_t^1} = \sum_{z=1}^{T+T^R} [(1 + n)(1 + \gamma)]^{-(z-1)} \frac{k_t^z}{h_{t+1-z}^1}$$

Los términos a la derecha de las dos anteriores ecuaciones en el estado estacionario son constantes a través del tiempo. Como consecuencia, tanto los niveles agregados de capital físico y humano como el nivel del producto crecen a una tasa $g \equiv (1 + n)\,(1 + \gamma) - 1$ en el estado estacionario.

## V. ESTIMACIÓN Y CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS

En el Cuadro 1 se presentan los parámetros utilizados para la calibración del modelo en el escenario base. Supóngase que el proceso educativo formal se inicia cumplidos los 6 años y que los agentes se retiran a los 60. Si asumimos que la esperanza de vida es de 70 años, se tiene que $T = 54$ y $T^R = 10$. La tasa de crecimiento anual de la población ($n$) proviene de las proyecciones del Departamento Administrativo Nacional de Estadística —DANE—.

Se supone una tasa de depreciación del capital físico del 5% anual y que las rentas de capital equivalen al 35% del producto. El parámetro $\theta = 0{,}76$, que representa el parámetro de participación del capital humano en la función definida por la ecuación (7), es tomado de Soares (2003).

Para el parámetro $\pi$ se toman datos de la Unesco y del DANE: según la primera, el gasto público en educación en Colombia equivale al 4,2% del PIB en el año 2001. En la matriz de utilización de 2001 del Sistema de Cuentas Nacionales se obtiene que los servicios de enseñanza equivalen al 6,5% del PIB. De la relación

Cuadro 1

Parámetros en el escenario base

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | 54 | Número de años potencialmente dedicados al estudio o al trabajo |
| $T^R$ | 10 | Número de años dedicados al retiro |
| $n$ | 0,018 | Tasa de crecimiento anual de la población |
| $\delta$ | 0,05 | Tasa de depreciación anual del capital |
| $\alpha$ | 0,35 | Parámetro de participación del capital físico en la función de producción |
| $\theta$ | 0,76 | Parámetro de participación del capital humano en función de acumulación de capital humano |
| $\pi$ | 0,65 | Fracción del gasto en educación financiada por el Gobierno |
| $z'$ | 30 | Edad a la cual el capital humano es heredado |
| $\phi$ | 0,23 | Fracción de capital humano heredado |
| $\sigma$ | 1,85 | Inverso de la elasticidad intertemporal de sustitución |
| $\beta$ | 0,975 | Factor de descuento |
| $A$ | 1,2 | Parámetro de escala en la función de producción |
| $B$ | 0,14 | Parámetro de escala en la función de acumulación de capital humano |

Fuente: supuestos, estimaciones y cálculos del autor con base en: Cuentas Nacionales-DANE, Soares (2003), Unesco, ECH (2001), DEE-DNP.

entre estos dos datos se concluye que aproximadamente el 65% del total del gasto en educación lo realiza el sector público.

Para la edad a la cual se hereda el capital humano ($z'$) se calculó el promedio de la diferencia entre la edad de los hijos y el jefe de hogar[1]. Para la fracción del capital humano heredado se realizó una regresión entre el logaritmo del ingreso

1 Cálculos con base en DANE-Encuesta continua de hogares (ECH) 2001.

laboral de los hijos y sus respectivos años de educación, la experiencia, la experiencia al cuadrado y el logaritmo del ingreso laboral de los padres. El parámetro $\phi$ es el efecto marginal del ingreso laboral de los padres sobre el ingreso de los hijos en la media (en el Cuadro 2 se presentan los resultados de la regresión[2]).

Los parámetros $\sigma$, $\beta$, $A$ y $B$ fueron calibrados con el fin de que en el estado estacionario se obtuviera:

- una relación capital producto igual a 2,1[3]
- una relación entre el consumo total y el producto igual a 0,83[4]
- un promedio en los años de educación de la población en edad de trabajar $\left(\sum_{z=1}^{T} u^z\right)$ igual a 8,2[5]
- que el gasto público en educación como porcentaje del producto fuera igual a 4,2%

## VI. SIMULACIONES Y RESULTADOS

Mediante métodos numéricos se busca la trayectoria de las variables consistente con el estado estacionario del modelo. En la primera parte de esta sección se muestra la trayectoria de algunas variables a lo largo del ciclo de vida del individuo, mientras que la segunda se centra en el efecto de la financiación pública de la educación sobre el equilibrio de largo plazo. En la tercera se realiza un análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos con respecto a diferentes configuraciones de parámetros.

### *A. TRAYECTORIA DE LAS VARIABLES A LO LARGO DEL CICLO DE VIDA*

En el Gráfico 1 se presenta el beneficio y el costo marginal de acumular capital humano a lo largo del ciclo de vida. Cuando $z$ es igual a 9 (la edad equivalente en la realidad sería 15, pues dentro del modelo los agentes inician su ciclo de vida con

2 El coeficiente que acompaña al salario del padre no cambia significativamente cuando se corrige por sesgo de selección.

3 Promedio entre 1994 y 2001, cálculos con base en DEE-DNP.

4 Promedio entre 1994 y 2004, cálculos con base en DEE-DNP.

5 Cálculos con base en DANE-ECH 2001.

Cuadro 2
Estimación del efecto marginal
del salario del padre sobre el salario del hijo

| | Media (pesos) |
|---|---|
| Salario del hijo | 240.119 |
| Salario del padre | 245.926 |
| | **Coeficientes** |
| *log* salario del padre | 0,235 (9,92) ** |
| Años de educación | 0,148 (22,36) ** |
| Experiencia | 0,112 (11,83) ** |
| Experiencia$^2$ | -0,002 (6,82) ** |
| Constante | 7,374 (25,79) ** |
| Observaciones | 1.528 |
| $R^2$ | 0,41 |

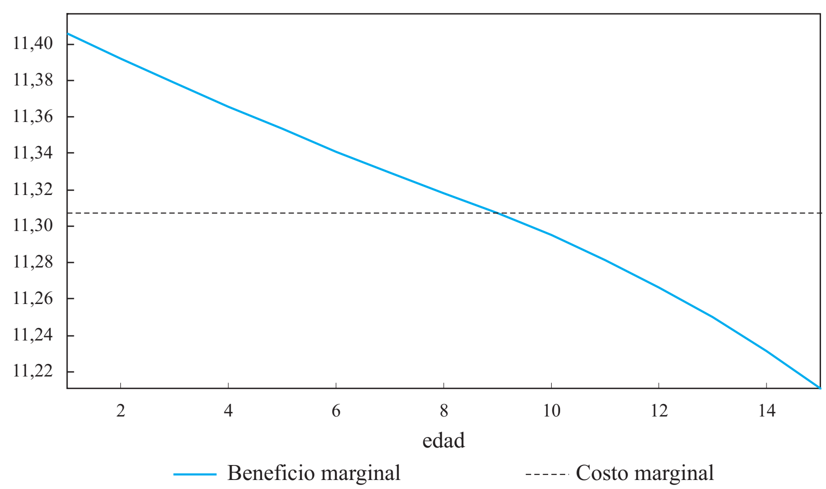
Nota: valores absolutos del estadistico *t* entre paréntesis.
* significativo al 5%; ** significativo al 1%.
Fuente: cálculos con base en DANE-ECV (2003).

6 años cumplidos), el beneficio marginal de acumular capital humano es igual a su costo marginal. A esa edad el individuo es indiferente con respecto a la distribución de su tiempo entre trabajo y estudio. El valor de $u^9$ consistente con el equilibrio en el estado estacionario es 0,2.

En el Gráfico 2 se representa la trayectoria de ingresos y gastos a lo largo del ciclo de vida en el estado estacionario cuando $h_t^1 = 1$. Para $z < 9$, el

Gráfico 1

Beneficio y costo marginal de acumular capital humano a lo largo del ciclo de vida



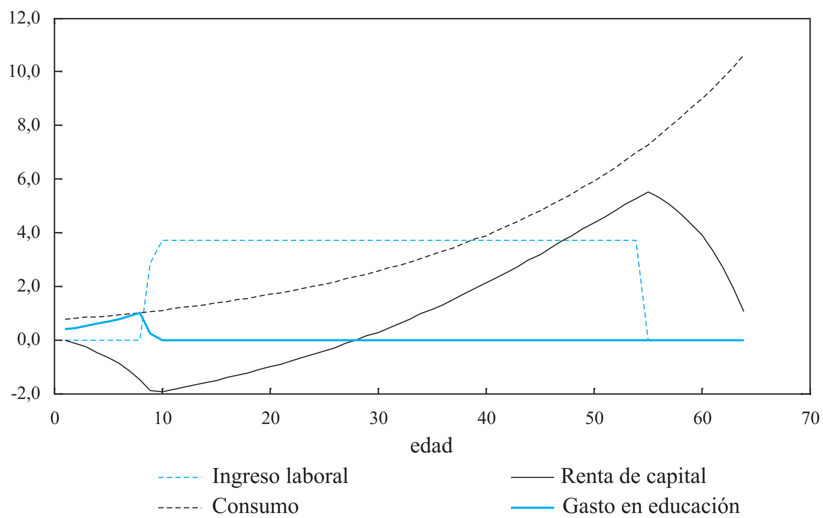

Fuente: cálculos del autor.

agente dedica todo su tiempo al estudio, de manera que en ausencia de ingresos laborales se endeuda con el fin de financiar su gasto en educación y su consumo.

Para $z > 9$, el agente dedica todo su tiempo al trabajo y comienza a acumular activos con el fin de pagar su deuda y obtener de ellos un rendimiento financiero durante su edad de retiro. Su ingreso laboral permanece constante a partir del momento cuando dedica todo su tiempo a trabajar, en un nivel más alto del que hubiera logrado si hubiera dispuesto menos tiempo o destinado menos recursos al estudio. Durante toda su vida busca suavizar su consumo, el cual crece a una tasa constante en el estado estacionario; llegada su edad de retiro, desacumula activos financieros hasta que al final de su último período de vida el nivel de aquellos sea igual a cero.

Gráfico 2

Trayectoria de ingresos y gastos a lo largo del ciclo de vida en el estado estacionario




Fuente: cálculos del autor.

## *B. EFECTO DEL GASTO PÚBLICO EN EDUCACIÓN*

La tarifa impositiva necesaria sobre los ingresos para financiar la educación es del 4,8%, mientras la tasa de crecimiento de la economía ($g$) es del 0,5%[6]. En el Cuadro 3 se presenta el efecto de un aumento en el gasto público en educación equivalente al 1% del PIB sobre el nivel de estado estacionario de tres variables: la tarifa sobre los ingresos, los años de educación y la tasa de crecimiento.

6 Hay que tener presente que el modelo no incluye cambio tecnológico ni ninguna otra fuente de crecimiento distinta a la acumulación de factores.

Cuadro 3
Efecto de un aumento del 1% del PIB
en el gasto público en educación

| $\Delta\, \tau$ | $\Delta \sum_{z=1}^{T} u^z$ | $\Delta g$ |
|---|---|---|
| **pp** | **variación absoluta** | **pp** |
| 1,11 | 0,1 | 0,14 |

Fuente: cálculos del autor.

La tarifa impositiva sobre los ingresos debe aumentar un 1,11% con el fin de obtener el recaudo equivalente al 1% del producto; de forma paralela, el aumento del gasto implica un aumento de apenas 0,1 años en el tiempo promedio de escolaridad. La tasa de crecimiento aumentaría 0,14 puntos porcentuales (pp) a largo plazo.

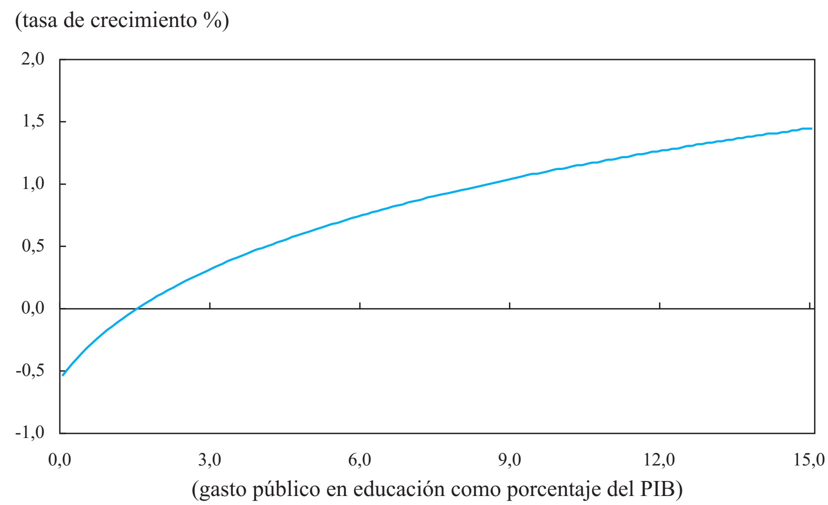
Vale la pena recordar que cambios marginales en la tasa de crecimiento pueden generar diferencias significativas en el nivel del producto a largo plazo.

Los gráficos 3 y 4 muestran, respectivamente, la tasa de crecimiento y los años de educación como funciones del gasto público en educación como porcentaje del PIB: ambas son funciones crecientes a ritmos decrecientes. Vale la pena resaltar que, a pesar de los enormes esfuerzos fiscales que se pudieran hacer, el modelo sugiere aumentos moderados en los años promedio de educación. Esto no necesariamente implica un impacto modesto sobre el nivel de capital humano, ya que mediante un mayor gasto en educación puede aumentar la formación de capital humano sin necesidad de un aumento significativo en los años de educación.

Con el fin de estimar el impacto del gasto público en educación sobre el bienestar, se construye una función de bienestar social donde la utilidad de las generaciones futuras es ponderada por el tamaño de la población y descontada a una tasa $R$. En el momento $\bar{t}$ el bienestar social sería:

Gráfico 3

Tasa de crecimiento del PIB,
frente al gasto público en educación




Fuente: cálculos del autor.

$$(26) \quad W_{\bar{t}} = \sum_{t=\bar{t}}^{\infty} (1+R)^{-(t-\bar{t})} \mu_t \sum_{z=1}^{T+T^R} \beta^{z-1} \left[(c^z_{t+z-1})^{1-\sigma}/(1-\sigma)\right]$$

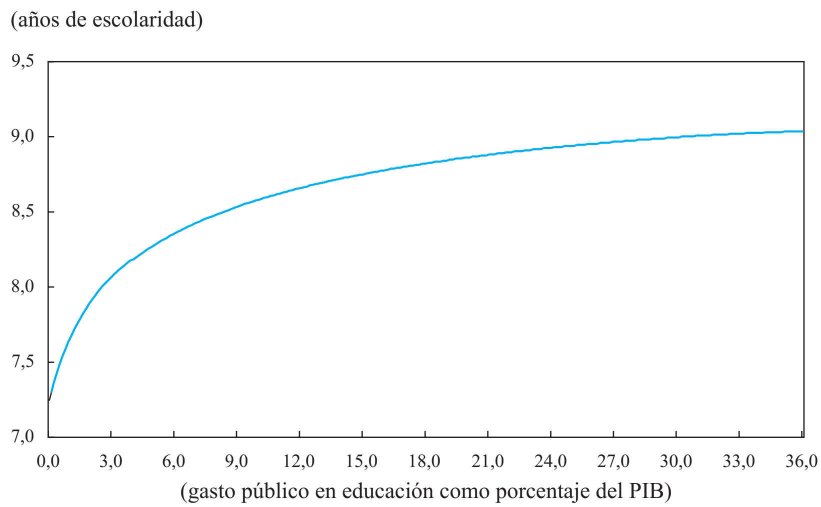
Para que (26) esté acotada se requiere que:

$$(27) \quad (1+R) > (1+n)(1+\gamma)^{1-\sigma}.$$

Dado que $h^1_t = (1+\gamma)^{(t-\bar{t})} h^1_{\bar{t}}$ y $\mu^1_t = (1+\gamma)^{(t-\bar{t})} \mu^1_{\bar{t}}$, la ecuación (24) y (26) implican que en el estado estacionario el bienestar social en el momento $\bar{t}$ vendría dado por:

$$(28) \quad \frac{W_{\bar{t}}}{\mu_{\bar{t}}(h^1_{\bar{t}})^{1-\sigma}} = \frac{(1+R)}{(1+R)-(1+n)(1+\gamma)^{(1-\sigma)}} \sum_{z=1}^{T+T^R} \beta^{z-1} \frac{\left[\frac{c^z_{t+z-1}}{h^1_t}\right]^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Gráfico 4
Años de escolaridad,
frente al gasto público en educación



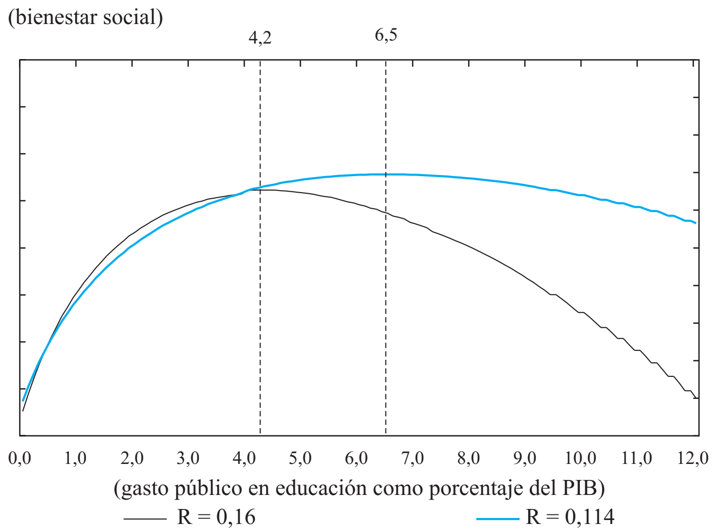

Fuente: cálculos del autor.

El bienestar social depende de la ponderación que se le dé a la utilidad de las generaciones futuras, la cual es, en principio, arbitraria. En el Gráfico 5 se presenta la función de bienestar social como función del gasto público en educación como porcentaje del PIB para $R$ = 11,4% y para $R$ = 16%.

A medida que aumenta el gasto en educación aumenta el capital humano que las generaciones futuras van heredando; no obstante, los impuestos y subsidios generan distorsiones que disminuyen el monto de recursos disponibles para las generaciones presentes. La importancia relativa de los elementos que aparecen en este *trade-off* depende de la tasa de descuento $R$, dado que mientras más alta sea $R$, menor es la importancia dada a la utilidad de las generaciones futuras. Por tanto el nivel del gasto público en educación que maximiza el bienestar social es decreciente en $R$.

Gráfico 5

Bienestar social,
frente al gasto público en educación




Fuente: cálculos del autor.

Por ejemplo, si $R$ = 11,4%, el nivel de gasto público en educación que maximiza el bienestar social en el estado estacionario equivale al 6,5% del PIB; y si $R$ = 16% el nivel de gasto que maximice el bienestar social es el 4,2% del PIB. Recuérdese que este es el mismo nivel de gasto en educación reportado en el escenario base; por consiguiente, el anterior análisis sugiere que para que el nivel de gasto público en educación actual sea aquel que maximice el bienestar social, la utilidad de las generaciones futuras tendría que descontarse a una tasa muy alta[7].

7 De nuevo, el cálculo del bienestar social se hace en el estado estacionario y no tiene en cuenta los costos y beneficios durante la transición de un estado estacionario a otro.

### *C. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD*

Con el fin de evaluar la robustez de los resultados, en el Cuadro 4 se presentan los resultados del modelo para algunas configuraciones de parámetros distintas a la del escenario calibrado (los parámetros que varían con respecto al escenario base se resaltan en negrilla, y los que no están reportados permanecen tal como aparecen en el Cuadro 1). Las dos últimas columnas representan, respectivamente, el impacto de un aumento en el gasto público en educación equivalente al 1% del PIB sobre los años de educación y la tasa de crecimiento.

Aunque los niveles de las variables (particularmente las relacionadas con la educación) son muy sensibles a los parámetros, no ocurre lo mismo con el efecto marginal del gasto público en educación. Excepto por aquellas configuraciones donde el gasto público en educación supera el 10% del PIB, un aumento equivalente al 1% del PIB implica un incremento en la tasa de crecimiento que varía entre 0,11 y 0,14 pp.

## VII. CONCLUSIONES

Este documento ha presentado un modelo OLG calibrado para Colombia, cuyo fin es estimar el impacto del gasto público en educación sobre el bienestar y el crecimiento. Las simulaciones sugieren que, a largo plazo, un incremento del 1% del PIB en el gasto público en educación aumenta la tasa de crecimiento anual de la economía cerca de 0,14 pp.

El nivel de gasto público en educación que maximice el bienestar social depende de la tasa a la cual se descuente la utilidad de las generaciones futuras. Para que el nivel de gasto que logre este objetivo sea equivalente al actual, la tasa de descuento tendría que ser considerablemente alta (16%).

El modelo presentado es un primer esfuerzo para integrar en un solo marco conceptual el gasto público en educación, el logro educativo de los individuos y el crecimiento económico; sin embargo, presenta algunas limitaciones. Dado el supuesto del agente representativo, se ha dejado de lado el análisis del impacto distributivo del gasto en educación (Glomm y Ravikumar, 1992). No se ha tenido en cuenta que un mayor *stock* de capital humano podría acelerar la innovación tecnológica (Benavides y Gelves, 2004). El capital humano puede generar

Cuadro 4
Análisis de sensibilidad

| Valores de los parametros | | | | | | Valores de las variables | | | | | | Efecto marginal | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | $\sigma$ | $\beta$ | $\varphi$ | $A$ | $B$ | $\sum_{z=1}^{T} u^z$ | $w$ | $r$ (%) | $K/Y$ | $C/Y$ | Gasto público en educación (% del PIB) | $\Delta \sum_{z=1}^{T} u^z$ | $\Delta g$ (%) |
| 0,76 | 1,85 | 0,97 | 0,23 | 1,20 | 0,14 | 8,21 | 1,30 | 11,4 | 2,14 | 0,82 | 4,2 | 0,09 | 0,14 |
| 0,76 | **1,00** | 0,97 | 0,23 | 1,20 | 0,14 | 14,08 | 1,27 | 11,9 | 2,07 | 0,67 | 10,5 | 0,06 | 0,09 |
| 0,76 | 1,85 | **0,99** | 0,23 | 1,20 | 0,14 | 9,68 | 1,29 | 11,5 | 2,13 | 0,78 | 5,6 | 0,05 | 0,11 |
| 0,76 | 1,85 | 0,97 | 0,23 | **2,00** | 0,14 | 8,82 | 2,65 | 13,6 | 1,88 | 0,80 | 5,1 | 0,07 | 0,13 |
| 0,76 | 1,85 | 0,97 | 0,23 | 1,20 | **0,17** | 8,84 | 1,21 | 13,7 | 1,87 | 0,80 | 5,1 | 0,06 | 0,13 |
| **0,60** | 1,85 | 0,97 | 0,23 | 1,20 | 0,14 | 6,64 | 1,25 | 12,4 | 2,01 | 0,78 | 6,9 | 0,06 | 0,12 |
| 0,76 | 1,85 | 0,97 | **0,46** | 1,20 | 0,14 | 6,66 | 1,29 | 11,5 | 2,12 | 0,76 | 5,4 | 0,08 | 0,10 |
| 0,76 | **1,00** | **0,99** | 0,23 | 1,20 | 0,14 | 16,30 | 1,26 | 12,2 | 2,04 | 0,60 | 13,7 | 0,03 | 0,07 |
| 0,76 | 1,85 | 0,97 | 0,23 | **2,00** | **0,17** | 9,29 | 2,46 | 16,4 | 1,63 | 0,78 | 6,0 | 0,04 | 0,13 |
| **0,50** | **1,00** | 0,97 | 0,23 | **2,00** | **0,17** | 10,82 | 2,08 | 24,3 | 1,20 | 0,45 | 25,6 | 0,01 | 0,06 |
| **0,50** | **1,00** | **0,99** | **0,46** | **2,00** | **0,17** | 10,42 | 2,05 | 25,0 | 1,17 | 0,35 | 30,6 | 0,01 | 0,04 |

Fuente: cálculos del autor.

externalidades que impliquen la existencia de rendimientos sociales crecientes en la acumulación de capital humano (Azariadis y Drazen, 1990; Pardo, 2007). La existencia de restricciones de crédito limitaría la posibilidad de acumular capital humano y potencializaría el impacto del gasto público en educación. La presencia de altruismo intergeneracional implicaría que al menos parte de la financiación de la educación de los niños correría por cuenta de sus padres.

A diferencia de lo que ocurre con la función de producción de bienes y servicios, no existe mucha investigación empírica para estimar la forma funcional ni los parámetros tecnológicos que describen la acumulación de capital humano. La estimación de estos parámetros debería hacer parte de la agenda investigativa de quienes estudian los efectos de la acumulación del capital humano sobre el crecimiento.

**REFERENCIAS**

1. Azariadis, C.; Drazen, A., "Threshold Externalities in Economic Development", *Quarterly Journal of Economics*, núm, 105, mayo, 1990, pp. 501-526.

2. Ben-Porath, Y., "The Production of Human Capital and the Life Cycle of Earnings", *Journal of Political Economy*, núm. 75, agosto, 1967, pp. 352-365.

3. Bénabou, R., "Tax and Education Policy in a Heterogeneous Agent Economy: What Levels of Redistribution Maximize Growth and Efficiency?", documento de trabajo, núm. 7132, National Bureau of Economic Research, 1999.

4. Benavidez, O.; Gelves, A., "Human Capital and Technological Change in a Real Model of Endogenous Growth" (mimeo), Escuela Colombiana de Ingeniería, 2004.

5. Boldrin, M. "Public Education and Capital Accumulation", documento de trabajo, núm. 1017, CMSEMS NorthWestern University, 1993.

6. D'Autume, A. ; Michel, P., "Education et Croissance", *Revue de Économie Politique*, núm. 104, julio, 1994, pp. 457-499.

7. DANE. Cuentas Nacionales, www.dane.gov.co [consultada en enero de 2006].

8. Glomm, G.; Ravikumar, B., "Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality", *Journal of Political Economy*, núm. 100, junio, 1992, pp. 818-834.

9. Heer, B.; Maussner, A., *Dynamic General Equilibrium Modeling*, Springer, 2005.

10. Pardo, O., "Rendimientos sociales crecientes en la acumulación de capital humano y financiación pública de la educación", *Archivos de Economía*, núm. 327, Departamento Nacional de Planeación, 2007.

11. Lucas, R., "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, núm. 22, julio, 1988, pp. 3-42.

12. Soares, J., “Self-interest and Public Funding of Education”, *Journal of Public Economics*, núm. 87, marzo, 2003, pp. 703-727.

13. Unesco-Institute for Estatistics, www.uis.unesco.org, [consultada en enero de 2006].

**ANEXO 1**

*MAXIMIZACIÓN DEL VALOR PRESENTE*
*DE LOS INGRESOS DISPONIBLES*

En este anexo se presenta la solución al problema de maximización del valor presente de los ingresos disponibles para consumo o ahorro que se expone en la sección IV.A.

Supongamos que el agente vive desde $t = 1$ y trabaja hasta $t = T$. Dados unos precios $w$ y $r$, una tasas impositiva $\tau$ sobre el ingreso, un *stock* inicial de capital físico igual a 0 y un *stock* inicial de capital humano igual a $h_1$, el problema de maximización del valor presente de los ingresos puede describirse como:

$$\max_{\{u_t, \varepsilon_t, h_{t+1}\}_{t=1}^{T}} \sum_{t=1}^{T} (1+(1-\tau)r)^{-(t-1)} [(1-\tau)w(1-u_t)h_t - (1-\pi)\varepsilon_t]$$

s. a.

$$h_{t+1} - h_t = B(u_t\, h_t)^{\theta}(\varepsilon_t)^{1-\theta} \qquad \text{para } t = 1,\ldots, T$$

$$0 \leq u_t \leq 1 \qquad \text{para } t = 1,\ldots, T$$

El problema se puede plantear recursivamente de la siguiente forma:

$$\vartheta_t(h_t) = \max_{u_t, \varepsilon_t, h_{t+1}} [(1-\tau)\, w(1-u_t)h_t - (1-\pi)\varepsilon_t] + (1+(1-\tau)r)^{-1}\vartheta_{t+1}(h_{t+1})$$

s. a.

$$h_{t+1} - h_t = B(u_t\, h_t)^{\theta}\, (\varepsilon_t)^{1-\theta} \qquad \text{para } t = 1,\ldots, T$$

$$0 \leq u_t \leq 1 \qquad \text{para } t = 1,\ldots, T$$

La solución del problema está caracterizada por las siguientes condiciones de primer orden:

$$\text{(A1)} \quad [u_t]\text{: } -(1-\tau)\, wh_t + \lambda_t B\theta u_t^{\theta-1}\, h_t^{\theta}\, \varepsilon_t^{1-\theta} + l_t^{0} - l_t^{1} = 0$$

$$\text{(A2)} \quad [\varepsilon_t]\text{: } -(1-\pi) + \lambda_t B(1-\theta)\, u_t^{\theta}\, h_t^{\theta}\, \varepsilon_t^{-\theta} = 0$$

$$\text{(A3)}\quad [h_{t+1}]: \quad \begin{array}{l} \lambda_t = (1 + (1 - \tau)r)^{-1}\vartheta_{t+1}'(h_{t+1}) \\ \lambda_T = 0 \end{array}$$

$$\text{(A4)}\quad [\lambda_t]: h_t + B(u_t\, h_t)^{\theta}\, (\varepsilon_t)^{1-\theta} - h_{t+1} = 0$$

Donde $\lambda_t$ es el beneficio marginal del capital humano en el momento $t$, y $l_t^0$ y $l_t^1$ corresponden a los multiplicadores sobre las restricciones $u_t \geq 0$ y $u_t \leq 1$, respectivamente; adicionalmente, por el teorema de la envolvente se obtiene:

$$\text{(A5)}\quad \vartheta_t'(h_t) = (1 - \tau)\, w\, (1 - u_t) + \lambda_t\, [1 + B\theta\, u_t^{\theta}\, h_t^{\theta-1}\, \varepsilon_t^{1-\theta}]$$

y al remplazar (A2) en (A1), (A3), (A4) y (A5), se tiene:

$$\text{(A1')}\quad \left[ -(1 - \tau)\, w + \theta\, (\lambda_t\, B)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{(1 - \theta)}{(1 - \pi)}\right)^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} \right] h_t + l_t^0 - l_t^1 = 0$$

$$\text{(A3')}\quad \lambda_t = (1 + (1 - \tau)\, r)^{-1}\vartheta_{t+1}'(h_{t+1})$$

$$\text{(A4')}\quad \frac{(h_{t+1} - h_t)}{h_t} = B\left(\lambda_t\, \frac{B(1 - \theta)}{(1 - \pi)}\right)^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} u_t$$

$$\text{(A5')}\quad \vartheta_t'(h_t) = (1 - \tau)\, w\, (1 - u_t) + \left[ \lambda_t + \theta\, (\lambda_t\, B)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{(1 - \theta)}{(1 - \pi)}\right)^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} u_t \right]$$

Remplazando (A5') en (A3') se obtiene:

$$\text{(A6)}\quad \lambda_{t-1} = (1+(1 - \tau)r)^{-1} \left[ (1 - \tau)\, w\, (1 - u_t) + \left[ \lambda_t + \theta\, (\lambda_t\, B)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{(1 - \theta)}{(1 - \pi)}\right)^{\frac{(1-\theta)}{\theta}} u_t \right] \right]$$

La solución se reduce, entonces, a un sistema no lineal constituido por las ecuaciones en diferencia (A1') y (A6) con dos variables ($u$ y $\lambda$). La variable $h$ se define residualmente mediante la ecuación (A4').

La ecuación (A1') define en cada instante del tiempo la solución para $u_t$ como función de la desigualdad entre el beneficio marginal del capital humano ($\lambda_t$) y su costo marginal:

$$
\text{(A8)}\quad
\begin{aligned}
&\text{Si } \lambda_t < \frac{1}{B}\left[\frac{(1-\tau)\,w}{\theta}\right]^{\theta}\left[\frac{(1-\pi)}{(1-\theta)}\right]^{1-\theta} \Rightarrow u_t = 0\\
&\text{Si } \lambda_t > \frac{1}{B}\left[\frac{(1-\tau)\,w}{\theta}\right]^{\theta}\left[\frac{(1-\pi)}{(1-\theta)}\right]^{1-\theta} \Rightarrow u_t = 1\\
&\text{Si } \lambda_t = \frac{1}{B}\left[\frac{(1-\tau)\,w}{\theta}\right]^{\theta}\left[\frac{(1-\pi)}{(1-\theta)}\right]^{1-\theta} \Rightarrow u_t \in [0,\ 1]
\end{aligned}
$$

En $t = T$ el beneficio marginal de estudiar es 0, y por tanto la fracción de tiempo dedicado al estudio es 0. Utilizando de manera recursiva (A8) y (A6) se tiene que mientras no se estudie el beneficio marginal del capital humano en $t$ es el flujo de salarios por unidad de eficiencia (netos de impuestos) desde $t + 1$ hasta $T$ traído a valor presente:

$$
\lambda_t = \left[\frac{1 - [1 + (1-\tau)r]^{-(T-t)}}{r}\right] w
$$

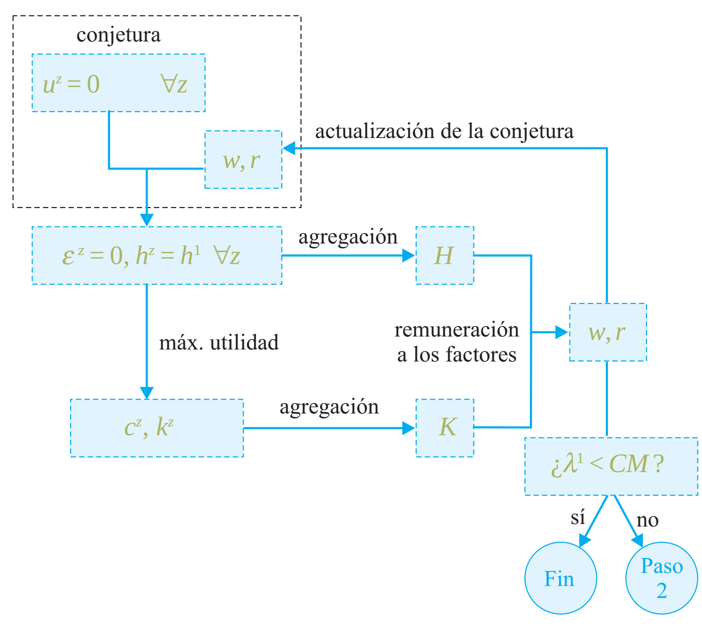
## ANEXO 2

*ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN DEL MODELO*

En este anexo se describe el algoritmo para solucionar el modelo en el estado estacionario. El primer paso consiste en hallar el equilibrio del modelo suponiendo que la tasa impositiva sobre los ingresos es igual a 0; luego, se verifica si la situación donde no se destina ningún recurso a acumular capital humano constituye un equilibrio: para que esto ocurra, el beneficio marginal de acumular capital humano a la edad 1 ($\lambda^1$) tendría que ser menor al costo marginal del mismo. El algoritmo utilizado para hallar el equilibrio en este caso se describe en el Gráfico A2.1.

Gráfico A2.1

Paso 1 del algoritmo



Dada una conjetura con respecto a $w$ y $r$, se encuentra la trayectoria para $h$ y $k$. Al agregar, se obtiene $H$ y $K$, los cuales, mediante las ecuaciones que definen la remuneración de los factores según su productividad marginal, definen $w$ y $r$. Estos valores, a su vez, actualizan la conjetura inicial, y el ciclo se repite hasta obtener unos precios que equilibren el mercado de factores. Una vez hallados, se calcula el costo marginal y el beneficio marginal de estudiar al inicio del ciclo de vida: si el costo marginal es mayor al beneficio marginal de estudiar a esa edad, el equilibrio implica que los agentes se dedican al trabajo desde el inicio del ciclo de vida y realizan un gasto nulo en educación, por lo cual no acumulan capital humano.

Pero si el beneficio marginal es mayor al costo marginal, el equilibrio implica al menos alguna dedicación de tiempo en el primer año de vida. El punto es encontrar hasta qué edad el agente representativo dedica algún tiempo al estudio, para lo cual hay que encontrar la edad en la cual el beneficio marginal de acumular capital humano es igual a su costo marginal.

El Gráfico A2.2 muestra el procedimiento para encontrar la edad $z^*$ en la cual se da esa igualdad: en él se comienza averiguando si el equilibrio se da cuando $z^* = 1$. De la igualdad entre $\lambda^1$ y $CM$ se despeja el capital físico por unidad de eficiencia $(K/H)_0$ que tendría que existir para que se cumpliera esta ecuación.

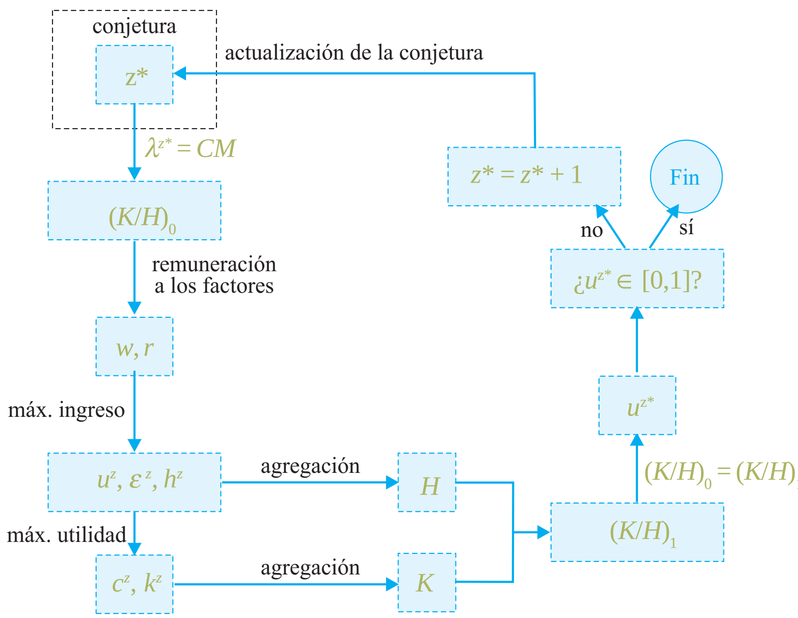
Mediante las ecuaciones que definen la remuneración de cada uno de los factores según su productividad marginal se obtiene $w$ y $r$. Dados estos precios se determina la trayectoria de $c^z$, $\varepsilon^z$, $h^z$, y $k^z$ para todo $z$ y la trayectoria de $u^z$ para $z \neq z^*$. Recuérdese que en $z = z^*$ el agente es indiferente entre estudiar y trabajar, y por tanto $u^{z^*}$ queda indeterminado. Dada una conjetura con respecto a $u^{z^*}$, la agregación a través de los individuos da lugar a $H$ y $K$, lo cual implica un capital por unidad de eficiencia $(K/H)_1$ que no necesariamente es igual a $(K/H)_0$. La conjetura con respecto a $u^{z^*}$ se actualiza hasta que $(K/H)_0 = (K/H)_1$.

Si la solución para $u^{z^*}$ cuando $z^* = 1$ pertenece al intervalo [0, 1], hemos encontrado la edad en la cual el agente es indiferente entre estudiar y trabajar y, de paso, la trayectoria de todas las variables en el estado estacionario para $\tau = 0$. En caso de que $u^{z^*} \notin [0, 1]$ hacemos $z^* = 2$ y repetimos el procedimiento hasta encontrar la edad en la cual el beneficio marginal de acumular capital humano es igual a su costo marginal.

El último paso consiste en actualizar $\tau$ mediante la igualdad entre ingresos y gastos del gobierno y repetir todo el ciclo hasta que $\tau$ equilibre el presupuesto del gobierno.

Gráfico A2.2

Paso 2 del algoritmo



## ANEXO 3

*NOTACIÓN DE VARIABLES Y PARÁMETROS*

Cuadro A.3

Parámetros en el escenario base

| | | |
|---|---|---|
| | **Variables** | |
| Individuales | $c_t^z$ | Consumo |
| | $u_t^z$ | Fracción del tiempo dedicada al estudio |
| | $\varepsilon_t^z$ | Gasto en educación |
| | $h_t^z$ | Capital humano del individuo |
| | $k_t^z$ | Activos financieros del individuo |
| Precios | $w_t$ | Salario por unidad de eficiencia |
| | $r_t$ | Tasa de interés |
| Agregados | $K_t$ | Capital físico |
| | $H_t$ | Capital humano dedicado al trabajo |
| Política | $\tau_t$ | Tasa impositiva sobre los ingresos |
| | **Parámetros** | |
| Población | $T$ | Número de años laboralmente activo |
| | $T^R$ | Número de años retirado |
| | $n$ | Tasa de crecimiento de la población |
| | $\mu_t^z$ | Población de edad $z$ en el momento $t$ |
| Preferencias | $\sigma$ | Aversión relativa al riesgo |
| | $\beta$ | Factor de descuento |
| Tecnología del capital humano | $\theta$ | Participación del capital humano |
| | $B$ | Factor de escala |
| | $\phi$ | Fracción del capital humano heredado |
| | $z'$ | Edad a la que se hereda el capital humano |
| Tecnología de los bienes | $\alpha$ | Participación del capital físico |
| | $A$ | Factor de escala |
| | $\delta$ | Tasa de depreciación del capital físico |
| Política | $\pi$ | Fracción del gasto en educación subsidiado |