

Expectativas y prima por riesgo inflacionario bajo una medida de compensación a la inflación*

Luis Fernando Melo Velandia**
Joan Camilo Granados Castro***

* Los resultados y opiniones son responsabilidad exclusiva de los autores y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva. Los autores agradecen al Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados de la SG-MR del Banco de la República por proporcionar la base de datos. También agradecen los comentarios y sugerencias de Luis Eduardo Arango, Mauricio Arias, Ricardo Bernal, A. Cobo, Pamela Cardozo, Daniel Parra, Juan S. Rojas, José V. Romero, Dagoberto Saboyá y, en especial, a Munir Jalil por su gran ayuda en una versión preliminar de este capítulo.

** Econometrista principal. Correo electrónico: lmelovel@banrep.gov.co

*** Profesional del Departamento de Inflación y Programación Macroeconómica. Correo electrónico: jgranaca@banrep.gov.co. Banco de la República.

I. INTRODUCCIÓN

La curva de rendimientos de las tasas de interés contiene información relevante sobre la economía, toda vez que sintetiza las percepciones de los agentes acerca de su estado futuro. Por ejemplo, en Arango y Arosemena (2003) se argumenta que el tramo corto de la curva cero cupón de los títulos de deuda pública TES posee información de expectativas de inflación a mediano plazo, y con base en esta información se usa la ecuación de Fisher para examinar escenarios futuros de inflación bajo diferentes tipos de expectativas.

En este contexto, una medida ampliamente utilizada es el diferencial entre los rendimientos de los bonos nominales y reales, conocido en la literatura como *break even inflation* (en lo sucesivo, BEI). Este refleja la compensación requerida para que los rendimientos de los dos tipos de bonos sean equivalentes para un vencimiento dado.

Por lo tanto, el BEI es una medida basada en la información del mercado que refleja la inflación esperada durante el período de maduración de los títulos y, por ende, constituye una alternativa a las encuestas de expectativas de inflación. Estas últimas, por lo general, abarcan una porción pequeña de la población, generan información menos oportuna y tienen disponibilidad para pocos horizontes de tiempo. Adicionalmente, las respuestas dadas por los encuestados no necesariamente son representativas del mercado, toda vez que son subjetivas y pueden depender de noticias recientes.

A pesar de lo anterior, el BEI está conformado por componentes adicionales a la expectativa de inflación, por lo que se debe ser cuidadoso al usarlo como una medida de inflación esperada. Sin embargo, la amplia disponibilidad de información concerniente al BEI y la posibilidad de calcularlo para cualquier período de maduración hacen que esta medida sea de especial interés para los diseñadores de política y agentes financieros.

Para el caso colombiano, Arias, Hernández y Zea (2006) calculan el BEI y otro indicador alternativo, el cual busca eliminar algunos sesgos del BEI. Ellos encuentran que la mediana de las diferencias entre estas dos medidas es tan solo de ocho puntos básicos. Sin embargo, estos autores no realizan estimaciones directas de los componentes de esta medida: expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario.

En este capítulo se calcula el BEI a partir de los rendimientos de TES en pesos y TES indexados a la UVR para el período comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Posteriormente se descompone el BEI en expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario. Las expectativas de inflación se calculan con base en un modelo de estado espacio, siguiendo metodologías desarrolladas por García y Werner (2008) y Adrian y Wu (2009).

El modelo estimado en este trabajo es una versión extendida de un modelo afín de estructura a término, en el que se incluyen las expectativas de inflación de la encuesta mensual realizada por el Banco de la República. La información de estas encuestas es incluida con el objetivo de reducir la incertidumbre en la estimación de los componentes del BEI y mejorar los pronósticos de la inflación obtenidos con el modelo de estado espacio.

El documento está presentado como sigue: en la Sección II se abarca conceptualmente el BEI y se definen conceptos asociados a los modelos de estructura a término que relacionan la inflación con los rendimientos de los bonos de deuda. En la Sección III se expone el modelo de estado espacio a partir del cual se generan las expectativas de inflación. En la Sección IV se muestran los resultados de las estimaciones del modelo y del BEI con respecto a cada uno de sus componentes. Por último, la Sección V contiene algunos comentarios finales.

II. **BREAK EVEN INFLATION**

La definición del BEI se basa en la ecuación de Fisher (1930), según la cual la tasa de interés nominal debe ser igual a la real más la inflación esperada. En su versión más básica esta ecuación está dada por:

$$i_t^{nom} = i_t^{real} + E_t[\pi_{t+1}]. \quad (1)$$

De forma análoga, el BEI se define como la diferencia entre los rendimientos de un bono nominal y uno real con el mismo plazo de maduración. Por ejemplo, para un vencimiento de un período:

$$BEI_t^1 = y_t^{nom,1} - y_t^{real,1} \approx E_t[\pi_{t+1}]. \quad (2)$$

Sin embargo, Sarte (1998) muestra que la ecuación (1) y, por lo tanto, la (2) no son adecuadas en ciertos contextos. Por ejemplo, cuando se asume que los agentes del mercado no son neutrales al riesgo, o cuando existe incertidumbre con respecto al nivel de precios futuro.

En particular, se espera que el BEI definido en (2) se aleje de las expectativas de inflación, a medida que aumente el horizonte de maduración de los bonos. En este caso, la naturaleza estocástica de la inflación no permite que se mantengan las relaciones descritas en las ecuaciones anteriores.

Debido a estos problemas, la diferencia entre los rendimientos de un bono nominal y uno real debe incluir un componente adicional al especificado en la ecuación (2): la prima por riesgo inflacionario. Esta es una contraprestación a los cambios no esperados de la inflación, los cuales afectan el rendimiento del bono nominal a lo largo de su período de maduración.

La ecuación del BEI en forma extendida se define como sigue:

$$BEI_t^n = y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = E_t(\pi_{t+1,t+n}) + \phi_t^n + \text{Ajuste por convexidad.} \quad (3)$$

En la ecuación (3)¹, $y_t^{nom,n}$ y $y_t^{real,n}$ corresponden a los rendimientos de un bono en términos nominales y reales en t con n meses de maduración, respectivamente. $E_t(\pi_{t+1,t+n})$ es la expectativa de la inflación promedio para un horizonte temporal entre 1 y n meses a partir de t , y ϕ_t^n es la prima por riesgo inflacionario asociada a n períodos². Al igual que la mayoría de la literatura relacionada con el BEI, este trabajo supone que el ajuste por convexidad³ es 0. La deducción de esta ecuación es desarrollada en el Anexo 3.

¹ Esta ecuación es obtenida por Christensen, López y Rudebusch (2008), García y Werner (2008) y Adrian y Wu (2009), entre otros.

² Las expectativas de inflación y la prima por riesgo inflacionario se examinarán con mayor detalle en las Secciones II.A y II.B de este capítulo.

³ Para una definición del concepto de ajuste por convexidad, véanse Fabozzi (1997) y Adrian y Wu (2009).

Debido a la facilidad para calcularlo e interpretarlo, el BEI se ha convertido en una *proxy* estándar de las expectativas de la inflación (Ejsing, García y Werner, 2007). Como se ha mencionado, esta medida provee información valiosa del estado de la economía desde el punto de vista del mercado.

A pesar del amplio uso y ventajas del BEI, esta medida presenta ciertos inconvenientes. En primer lugar, se asume que tanto los bonos nominales como los reales tienen el mismo grado de liquidez. Sin embargo, en la gran mayoría de los mercados financieros se observa que los bonos nominales son transados en cantidades mayores que los reales con características similares (Sack, 2000). Por otra parte, a partir de los resultados de la ecuación (3), se tiene que el BEI se puede interpretar como una *proxy* de las expectativas de inflación solo si la prima por riesgo inflacionario es baja⁴.

A. Expectativas de inflación

Uno de los componentes del BEI definido en (3) es la expectativa promedio de la inflación. Bajo el supuesto de que el ajuste por convexidad es cero y que la prima por riesgo inflacionario es pequeña, el BEI debe corresponder a una compensación al inversionista por la pérdida de valor del activo, sujeto a una tasa de interés, generada por los aumentos en el nivel de precios.

No obstante, es importante mencionar que la expectativa de inflación derivada del BEI no es un indicador de inflación puntual, sino de la inflación esperada promedio. Por ejemplo, si se calcula el diferencial de tasas de interés con bonos de maduración a dos años, asumiendo una prima por riesgo inflacionario muy pequeña, y $E_t(\pi_{t+1,t+2}) = 4\%$, se tiene que la inflación esperada durante los próximos dos años a partir de t será en promedio 4%, mas no que la inflación puntual en dicho período será de 4%.

De esta forma, la expectativa de inflación a partir del BEI está dada por:

$$E_t(\pi_{t+1,t+n}) = \frac{1}{n} E_t(\pi_{t+1} + \dots + \pi_{t+n}), \quad (4)$$

⁴ Arias *et al.* (2006) describen algunos sesgos asociados al BEI, relacionados con las diferencias de liquidez entre los bonos, entre los impactos de las tasas de interés, y entre los riesgos de tasa de interés real de los bonos, dadas sus distintas duraciones.

donde n corresponde al período de maduración de los bonos asociados al cálculo del BEI en el período t .

B. La prima por riesgo inflacionario

Para definir la prima por riesgo inflacionario es necesario describir en primer lugar el factor de descuento estocástico, el cual determina el precio de los bonos al igual que su rentabilidad.

1. Factor de descuento estocástico

El factor de descuento estocástico es usado en la literatura para definir los precios y las rentabilidades de los bonos de deuda. Christensen *et al.* (2008), Adrian y Wu (2009) y Piazzesi (2009), entre otros, utilizan este concepto para ligar las rentabilidades de los bonos a la inflación y para definir la prima por riesgo inflacionario. Como será explicado en secciones posteriores, este concepto también resulta de gran utilidad para relacionar los parámetros del modelo de estado espacio con los de un modelo afín de estructura a término⁵.

Para definir el factor de descuento estocástico se parte de un modelo de maximización de utilidad intertemporal para un inversionista representativo⁶. En este modelo se puede transar un activo en diferentes períodos de tiempo y se maximiza la expectativa de una función de utilidad separable, de la siguiente forma:

$$\text{máx } E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j U(C_{t+j}) \right], \quad (5)$$

donde δ es el factor de descuento temporal, C_{t+j} es el consumo del inversionista en el período $t + j$ y $U(C_{t+j})$ es la utilidad del consumo en $t + j$ ⁷.

⁵ Una explicación detallada de los modelos afines de estructura a término se encuentra en Duffie y Kan (1996).

⁶ Para mayores detalles de este modelo, véanse Campbell, Lo y MacKinlay (1997).

⁷ Las restricciones a las cuales está sujeto este problema de optimización son las convencionales. Es decir, el flujo de ingresos debe ser igual al flujo de gastos destinado para consumo, durante los $n - 1$ períodos que trabaje el inversionista. Además, en el

Una de las condiciones de primer orden de la ecuación (5) está dada por:

$$U'(C_t) = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) U'(C_{t+1}) \right], \quad (6)$$

donde $R_{i,t}$ es el rendimiento del activo i en el período t .

La ecuación (6) iguala el costo marginal de utilidad de consumir un peso menos en t al beneficio de utilidad marginal esperada de invertir un peso en un activo i en t , venderlo en $t + 1$ a $(1 + R_{i,t+1})$ pesos y consumir las ganancias.

Dividiendo (6) por $U'(C_t)$:

$$1 = E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) M_{t+1}^{real} \right], \quad (7)$$

donde:

$$M_{t+1}^{real} = \frac{\delta U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}. \quad (8)$$

En la ecuación (8) se define el factor de descuento estocástico real o *pricing kernel*, M_{t+1}^{real} . En este caso, dicha expresión también equivale a la tasa marginal de sustitución intertemporal a la que se enfrenta el inversionista que compra el bono.

Además, M_t^{real} está relacionado positivamente con la utilidad marginal del consumo (Adrian y Wu, 2009). Por esta razón, bajo el supuesto de utilidad marginal decreciente, se espera que cuando el consumo agregado y la inflación sean altos⁸, M_t^{real} tienda a ser muy pequeño.

El BEI también está relacionado con el factor de descuento, puesto que la rentabilidad puede verse como la derivada del precio del bono en un momento t . Los precios de un bono nominal $(P_t^{nom,n})$ y real $(P_t^{real,n})$ vienen dados por:

período n no hay trabajo, pero el consumo debe ser igual al ahorro del período anterior más el rendimiento correspondiente.

⁸ Esto se debe, en general, al consumo y al nivel de precios que se mueven en la misma dirección.

$$P_t^{nom,n} = E_t \left[M_{t+n}^{nom} \right], \quad P_t^{real,n} = E_t \left[M_{t+n}^{real} \right], \quad (9)$$

donde $M_t^{nom} = \frac{M_t^{real}}{\pi_t}$ corresponde al factor de descuento nominal.

2. Prima por riesgo inflacionario

Seguindo los resultados de García y Werner (2008), Adrian y Wu (2009), Piazzesi (2009) y, en general, la literatura de modelos afines de estructura a término, se puede definir el factor de descuento estocástico para los bonos reales como:

$$m_{t+1}^{real} = -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} \quad (10)$$

y para los bonos nominales:

$$m_{t+1}^{nom} = -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} - e_n' \mathbf{X}_{t+1}, \quad (11)$$

donde $m_{t+1}^{real} = \log(M_{t+1}^{real})$, $m_{t+1}^{nom} = \log(M_{t+1}^{nom}) = m_{t+1}^{real} - \pi_{t+1}$, $e_n = (0, 0, 1)$, λ_t es el precio de mercado del riesgo, r_t^{real} es la tasa de interés del bono real y ε_t sigue un proceso ruido blanco gaussiano multivariado. El vector \mathbf{X}_t está conformado por dos factores latentes no observables y la inflación.

En este tipo de modelos λ_t y r_t^{real} son funciones afines del vector \mathbf{X}_t , como sigue:

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{X}_t, \quad (12)$$

$$r_t^{real} = \delta_0 + \delta_1' \mathbf{X}_t, \quad (13)$$

con:

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} l_t^1 \\ l_t^2 \\ \pi_t \end{bmatrix}, \quad \lambda_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{0,1} \\ \lambda_{0,2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1,11} & \lambda_{1,12} & 0 \\ \lambda_{1,21} & \lambda_{1,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \delta_1 = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

La definición de la prima por riesgo inflacionario en función del factor de descuento estocástico está relacionada con una ecuación de Fisher extendida. En este contexto, Arango y Flórez (2008) amplían esa ecuación incluyendo la prima

por riesgo inflacionario para un período adelante. A partir de (1), y basándose en Sargent (1987), estos autores llegan a una expresión similar que incluye un término adicional correspondiente a la covarianza entre el factor de descuento estocástico y la inflación.

De acuerdo con lo anterior y siguiendo los trabajos de Christensen *et al.* (2008) y Adrian y Wu (2009), la prima por riesgo inflacionario se puede expresar como la covarianza entre la inflación futura y el factor de descuento estocástico futuro, de la siguiente forma⁹:

$$\phi_{t,n} = \frac{1}{n} \text{Cov}_t \left(\sum_{j=1}^n \pi_{t+j}, \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right), \quad (15)$$

donde n es el horizonte de maduración de los bonos y π_t es la inflación en el período t .

III. METODOLOGÍA

Una vez obtenido el BEI como la diferencia entre los rendimientos de bonos nominales y reales para cada período de maduración, se calcula la descomposición de esta medida. En primer lugar, se estiman las expectativas de inflación promedio con base en un modelo afín de estructura a término. Posteriormente, la prima de riesgo es calculada como la diferencia entre el BEI y las expectativas de inflación promedio.

La representación de estado espacio del modelo afín de estructura a término es la siguiente:

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{d} + Z\mathbf{X}_t + \eta_t, \quad (16)$$

$$\mathbf{X}_t = \mu + \Phi\mathbf{X}_{t-1} + \Sigma\varepsilon_t, \quad (17)$$

donde $\eta_t \sim NID(0, H)$ y $\varepsilon_t \sim NID(0, I)$ son dos errores no correlacionados. $\mathbf{X}_t = (l_t^1, l_t^2, \pi_t)'$ es el vector de estado conformado por dos factores latentes y la inflación. Además:

⁹ Esta expresión es deducida en el Anexo 3.

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_3} \end{bmatrix}.$$

Y:

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} y_t^{nom,3} \\ y_t^{nom,12} \\ y_t^{nom,24} \\ y_t^{nom,36} \\ y_t^{nom,60} \\ \pi_t \\ y_t^{real,24} \\ y_t^{real,36} \\ y_t^{real,60} \\ E_t^{enc}[\pi_{t+12}] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{-A_3^{nom}}{3} \\ \frac{-A_{12}^{nom}}{12} \\ \frac{-A_{24}^{nom}}{24} \\ \frac{-A_{36}^{nom}}{36} \\ \frac{-A_{60}^{nom}}{60} \\ 0 \\ \frac{-A_{24}^{real}}{24} \\ \frac{-A_{36}^{real}}{36} \\ \frac{-A_{60}^{real}}{60} \\ \mathbf{e}'_n(I - \Phi^{12})(I - \Phi)^{-1}\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{B}_3^{nom}}{3} \\ \frac{-\mathbf{B}_{12}^{nom}}{12} \\ \frac{-\mathbf{B}_{24}^{nom}}{24} \\ \frac{-\mathbf{B}_{36}^{nom}}{36} \\ \frac{-\mathbf{B}_{60}^{nom}}{60} \\ \mathbf{e}'_n \\ \frac{-\mathbf{B}_{24}^{real}}{24} \\ \frac{-\mathbf{B}_{36}^{real}}{36} \\ \frac{-\mathbf{B}_{60}^{real}}{60} \\ \mathbf{e}'_n\Phi^{12} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

donde $E_t^{enc}[\pi_{t+12}]$ son las expectativas de inflación doce meses adelante obtenidas mediante una encuesta, $\mathbf{e}'_n = (0,0,1)$. Los valores de los parámetros A_n^{nom} , A_n^{real} , \mathbf{B}_n^{nom} , y \mathbf{B}_n^{real} , con $n = 3,12,24,60$ meses, son generados a partir de una relación afín entre la inflación y las tasas de interés bajo un modelo de estructura a término, de acuerdo con García y Werner (2008)¹⁰.

La estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de η es:

$$Var(\eta) = diag \left\{ \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), \tilde{\sigma}_\eta^2(1), 0, \tilde{\sigma}_\eta^2(2), \tilde{\sigma}_\eta^2(2), \tilde{\sigma}_\eta^2(2), \tilde{\sigma}_\eta^2(3) \right\}. \quad (19)$$

¹⁰ En el Anexo 1 se presenta una breve explicación de la generación de estos parámetros.

En la ecuación anterior, $diag\{\mathbf{A}\}$ es una matriz diagonal donde sus elementos **corresponden al vector \mathbf{A}** .

En la expresión (19) los primeros cinco términos están definidos como $\tilde{\sigma}_\eta^2(1)$, lo que implica que la varianza del error de la ecuación (16), asociada a los rendimientos de los bonos nominales, es la misma sin importar el período de maduración. De forma análoga, la varianza del error asociada a los rendimientos de los bonos reales **toma el valor de $\tilde{\sigma}_\eta^2(2)$** para los tres períodos de maduración. Es importante notar que la inflación aparece tanto en el vector de observaciones \mathbf{w}_t , **como en el vector de estado \mathbf{X}_t** ; por lo tanto, la varianza del error asociado a la inflación en la ecuación de medida **deber ser 0**.

La ecuación de medida descrita en (16) indica una relación lineal entre los rendimientos de los bonos nominales y reales con la inflación y dos factores latentes. Estos componentes no observables están asociados con la relación que existe entre el factor de descuento estocástico y el precio de los bonos.

El componente final de la ecuación de medida está relacionado con la inclusión de las expectativas de inflación, obtenidas a partir de una encuesta, y tiene como objetivo mejorar los pronósticos de este modelo. Esta ecuación indica que las expectativas de la encuesta corresponden a los pronósticos de la inflación obtenidos de la ecuación de medida más un error. La utilidad de las encuestas para generar pronósticos de las expectativas ha sido discutida en la literatura en trabajos como los de Ang, Bekaert y Wei (2007) y Ciccarelli y García (2009).

La ecuación de transición definida en (17) describe la dinámica del vector de estado del modelo y sirve para generar los pronósticos de la inflación con los cuales se calculan las expectativas promedio de la inflación según la ecuación (4).

Dada la anterior representación de estado espacio, la estimación del modelo se realiza por medio de la metodología de máxima verosimilitud, utilizando el filtro de Kalman. Como se mencionó anteriormente, los coeficientes A_n^j y B_n^j de (18) para $j = nom, real$ y $n = 3, 12, 24, 36, 60$ ¹¹ se obtienen de acuerdo con la metodología sugerida por García y Werner (2008), tal como se explica en el Anexo 1.

¹¹ En el caso de los bonos reales solo se utiliza $n = 24, 36, 60$.

Las expectativas promedio de la inflación hasta 12, 24 y 60 meses se pueden obtener a partir de los pronósticos del vector de estado del modelo. Dados los cálculos del BEI y de las expectativas promedio de la inflación, se puede obtener una estimación de la prima por riesgo inflacionario a partir de la ecuación (3).

Uno de los intereses de la estimación del BEI es conocer bajo qué condiciones el diferencial de tasas de interés permite generar una aproximación apropiada a la inflación esperada promedio. Una herramienta útil en este caso es la descomposición de varianza de este indicador para cada período de maduración:

$$\mathbf{1} = \frac{\text{cov}(BEI_t^n, E_t(\pi_{t,t+n}))}{\text{Var}(BEI_t^n)} + \frac{\text{cov}(BEI_t^n, \phi_t^n)}{\text{Var}(BEI_t^n)}. \quad (20)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (20) indica la proporción de la varianza del BEI explicada por la expectativa promedio de inflación, mientras que el segundo término corresponde a la proporción explicada por la prima por riesgo inflacionario.

IV. RESULTADOS

El cálculo del BEI se determina con base en las tasas asociadas a la curva cero cupón de los bonos TES en pesos y TES indexados a la unidad de valor real (UVR), utilizando la metodología de Nelson y Siegel (1987)¹². La muestra utilizada abarca el período comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009 y es calculada a partir de los promedios mensuales de los datos diarios. La inflación se calcula como la variación anual del índice de precios al consumidor. Los datos observados de las expectativas de inflación se toman de la encuesta de expectativas de inflación, tasa de cambio y tasa de intervención realizada por el Banco de la República con frecuencia mensual.

Los resultados de la estimación del modelo descrito en (16) y (17) se encuentran en el Cuadro 1. Estos valores indican que los parámetros del modelo son estadística-

¹² Estos datos fueron proporcionados por el Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercado de la SG-MR del Banco de la República.

mente diferentes de cero para los niveles usuales de significancia. En el Anexo 2 se muestran diferentes pruebas de especificación sobre los residuales de predicción del modelo de estado espacio. Estos resultados indican que no existen indicios de mala especificación en el modelo.

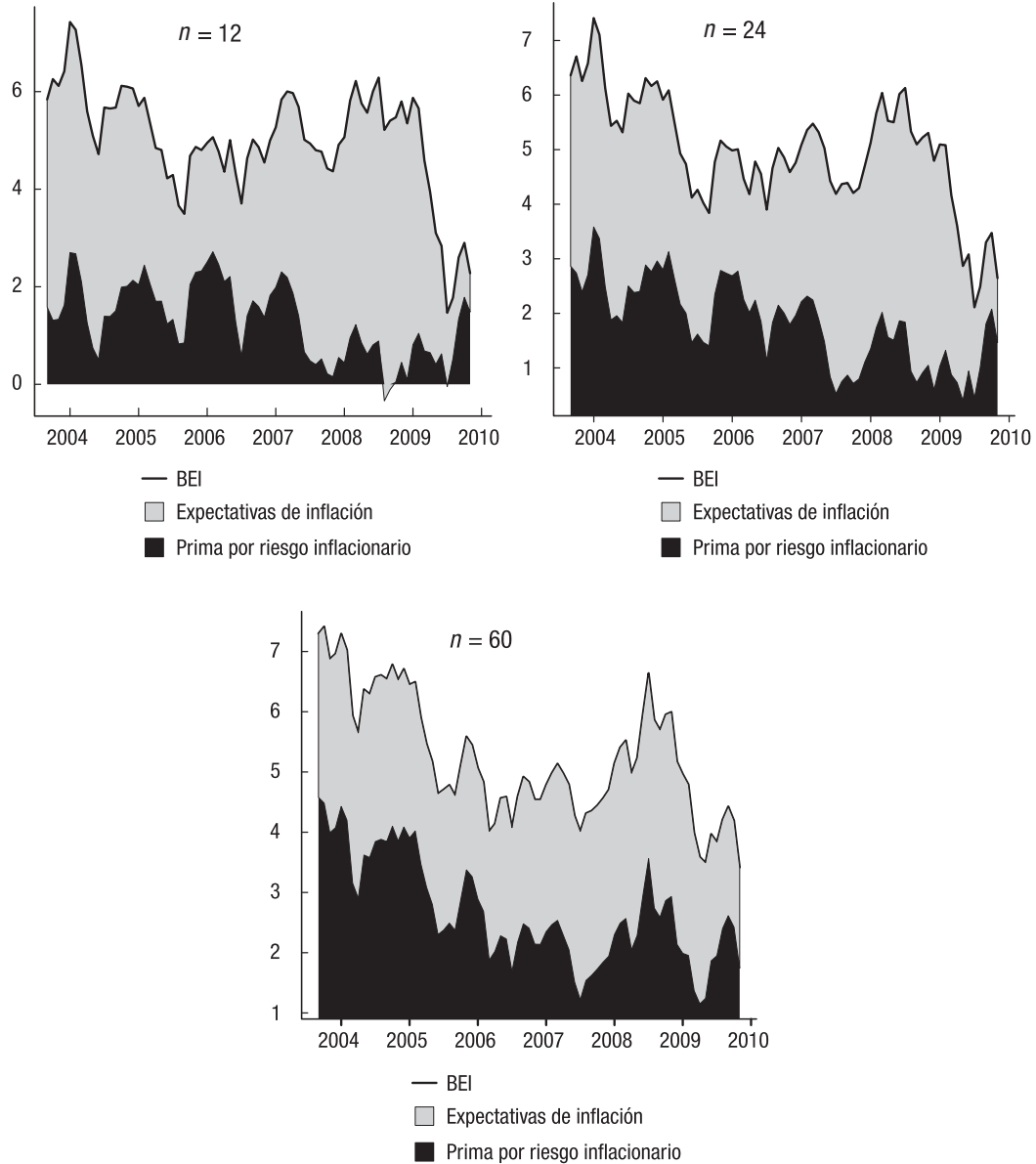
CUADRO 1. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN

Parámetro	Coefficientes	Desviaciones estándar
Φ	$\begin{bmatrix} 0,92 & 0 & 0 \\ 0,37 & -0,89 & 0 \\ -1,45 & -1,79 & -0,77 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,01 & - & - \\ 0,18 & 0,03 & - \\ 0,09 & 0,07 & 0,03 \end{bmatrix}$
δ_0	$[1,81]$	$[0,14]$
δ_1	$\begin{bmatrix} -0,88 \\ -0,42 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,06 \\ 0,04 \\ - \end{bmatrix}$
Σ	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & 0,24 \end{bmatrix}$
λ_0	$\begin{bmatrix} 1,64 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,09 \\ - \end{bmatrix}$
λ_1	$\begin{bmatrix} 1,03 & 0,18 & 0 \\ 0,65 & -0,68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,12 & 0,04 & - \\ 0,19 & 0,10 & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$
μ	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ - \\ 0,40 \end{bmatrix}$
$diag(Var(\eta))$	$[2,10;2,10;2,10;2,10;2,10;2,10;2,31;2,31;2,31;1,31]$	$[0,08;0,08;0,08;0,08;0,08;-;0,30;0,30;0,30;1,14]$

Fuente: cálculos de los autores.

A. Estimación y descomposición del BEI

GRÁFICO 1. DESCOMPOSICIÓN DEL BEI PARA ESTIMACIONES DE 12, 24 Y 60 MESES ADELANTE



Fuente: cálculos de los autores.

En el Gráfico 1 se muestra la estimación y descomposición del BEI para 12, 24 y 60 meses de maduración. En estos gráficos la línea negra representa el valor del BEI, mientras que las áreas grises y negras corresponden a los valores de las expectativas promedio de la inflación y la prima por riesgo inflacionario, respectivamente. Estas estimaciones son presentadas para diferentes muestras en el Cuadro 2.

Estos resultados muestran que existe, en general, una tendencia decreciente de las expectativas promedio de la inflación. Sin embargo, se observa un crecimiento moderado en los años 2007 y 2008. También se observa una disminución considerable de las expectativas de la inflación al final de la muestra analizada. Esto podría obedecer a dos motivos; en primer lugar, las expectativas formadas por los agentes tienden a ser adaptativas, por lo que los niveles recientes observados de inflación tienen una mayor ponderación cuando se generan dichas expectativas. Por otro lado, es posible que los agentes hayan tenido en cuenta la baja actividad económica y el consumo de 2009 para determinar la inflación esperada promedio.

Los resultados de la prima por riesgo inflacionario son consistentes con los esperados teóricamente: a medida que aumenta el plazo de maduración, la prima por riesgo inflacionario toma valores más altos. Este aumento implica que el BEI no sea una buena medida de las expectativas de inflación para mediano y largo plazo. Otro punto importante es que la prima por riesgo inflacionario tiene una tendencia decreciente a lo largo de la muestra para períodos de maduración medianos y largos ($n = 24$ y 60 meses). Esto puede obedecer al aumento de credibilidad de las políticas de estabilización de la inflación en toda la muestra analizada.

CUADRO 2. DESCOMPOSICIÓN DEL BEI PARA DIFERENTES HORIZONTES DE PRONÓSTICO

Muestra	BEI ¹²	BEI ²⁴	BEI ⁶⁰	$E_t(\pi_{t+1,t+12})$	$E_t(\pi_{t+1,t+24})$	$E_t(\pi_{t+1,t+60})$	ϕ^{12}	ϕ^{24}	ϕ^{60}
2003	6,16	6,48	7,14	4,69	3,80	2,85	1,46	2,68	4,28
2004	5,99	6,12	6,53	4,29	3,54	2,74	1,70	2,58	3,79
2005	4,72	4,87	5,37	2,98	2,66	2,34	1,74	2,21	3,03
2006	4,69	4,65	4,56	2,87	2,59	2,31	1,81	2,06	2,25
2007	5,17	4,74	4,61	4,10	3,43	2,69	1,06	1,31	1,93
2008	5,66	5,48	5,63	5,17	4,14	3,01	0,49	1,34	2,62
2009	3,37	3,45	4,08	2,52	2,35	2,20	0,85	1,10	1,88
2003-2009	5,02	4,99	5,25	3,73	3,16	2,57	1,29	1,83	2,68

Nota: BEIⁿ y ϕ^n indican el *break even inflation* y la prima por riesgo inflacionario para n meses adelante, respectivamente. $E_t(\pi_{t+1,t+n})$ es la esperanza promedio de la inflación para los períodos $t + 1$ hasta $t + n$, condicionada a la información disponible en t .

Fuente: cálculos de los autores.

CUADRO 3. DESCOMPOSICIÓN DE VARIANZA DEL BEI PARA DIFERENTES HORIZONTES DE PRONÓSTICO

Horizonte (meses)	Inflación esperada	Prima por riesgo inflacionario
12	0,76	0,24
24	0,49	0,51
60	0,19	0,81

Fuente: cálculos de los autores.

En el Cuadro 3 se lleva a cabo la descomposición de varianza del BEI para la muestra analizada. Se encuentra que a corto plazo (doce meses) la variabilidad del BEI es explicada en un 76% por la varianza de las expectativas de inflación promedio y el 24% restante es explicado por la prima por riesgo inflacionario. Estos resultados se revierten a medida que aumenta el período de maduración de los bonos. Para un horizonte de cinco años, la variabilidad explicada por las expectativas de inflación es tan solo del 19% y, por consiguiente, del 81% por parte de la prima por riesgo inflacionario.

V. COMENTARIOS FINALES

En este documento se estima el BEI a partir de los rendimientos de los TES en pesos y los TES indexados a la UVR para una muestra entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Por otra parte, el BEI se descompone en dos factores: expectativas promedio de la inflación y prima por riesgo inflacionario. Estos cálculos son realizados para tres períodos de maduración: uno, dos y cinco años.

Las expectativas promedio de la inflación son estimadas por medio de un modelo afín de estructura a término que relaciona los rendimientos de los TES con dos factores latentes y la inflación. Con el objetivo de mejorar los pronósticos de la inflación, este modelo incluye las expectativas de inflación a doce meses, obtenidas de la encuesta del Banco de la República.

Las estimaciones de las expectativas de inflación presentan, en general, una tendencia decreciente durante el período estudiado. Esto se puede deber al aumento de la confianza en la política monetaria por parte de los agentes. Otro resultado que soporta esta hipótesis es que la prima por riesgo inflacionario presenta una

tendencia decreciente a lo largo de la muestra para períodos de maduración de mediano y largo plazo (dos y cinco años).

Los resultados de las estimaciones del BEI muestran que a corto plazo (un año) esta es una medida aproximada de las expectativas de inflación. Para períodos de maduración más largos (cinco años), esta situación cambia, pues la prima por riesgo inflacionario toma valores altos y se convierte en un componente importante del BEI, lo que se debe a que existe un mayor riesgo de cambios no esperados en la inflación futura a medida que el horizonte de tiempo es más largo.

La afirmación anterior es corroborada por los resultados de la descomposición de varianza del BEI. A corto plazo (un año) se encuentra que la variabilidad de las expectativas de inflación explica en un 76% la varianza del BEI, mientras que a largo plazo (cinco años) esta solo explica el 19%.

REFERENCIAS

- Adrian, T., & Wu, H. (2009). *The term structure of inflation expectations* (Staff Reports N° 362). Federal Reserve Bank of New York.
- Ang, A., Bekaert, G., & Wei, M. (2007). Do macro variables, asset markets, or surveys forecast inflation better? *Journal of Monetary Economics*, 54(4), 1163-1212.
- Arango, L. E., & Arosemena, M. A. (2003). *El tramo corto de la estructura a plazo como predictor de expectativas de inflación en Colombia* (Borradores de Economía N° 264). Banco de la República.
- Arango, L. E., & Flórez, L. A. (2008). Tramo corto de la curva de rendimientos, cambio de régimen inflacionario y expectativas de inflación en Colombia. *El Trimestre Económico*, 75(297), 183-210.
- Arias, M., Hernández, C., & Zea, C. (2006). *Expectativas de inflación en el mercado de deuda pública colombiano* (Borradores de Economía N° 390). Banco de la República.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press.
- Christensen, J. H. E., López, J. A., & Rudebusch, G. D. (2008). *Inflation expectations and risk premiums in an arbitrage-free model of nominal and real bond yields* (Working Paper Series N° 34). Federal Reserve Bank of San Francisco.

- Ciccarelli, M., & García, J. A. (2009). *What drives euro area break-even inflation rates?* (Working Paper Series N° 996). European Central Bank.
- Duffie, D., & Kan, R. (1996). A yield factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, 6(4), 379-406.
- Ejsing, J., García, J. A., & Werner, T. (2007). *The term structure of euro area break-even inflation rates: The impact of seasonality* (Working Paper Series N° 830). European Central Bank.
- Fabozzi, F. J. (1997). *Bonds markets analysis and strategies* (3rd ed.). Prentice Hall.
- Fisher, I. (1930). *The theory of interest*. Macmillan.
- García, J. A., & Werner, T. (2008). *Inflation risks and inflation risk premia* (Working Paper). European Central Bank.
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modelling of yield curves. *Journal of Business*, 60(4), 473-489.
- Piazzesi, M. (2009). Affine term structure models. In L. Hansen, & Y. Ait-Sahalia (Ed.), *Handbook of financial econometrics* (pp. 691-766). North Holland.
- Sack, B. (2000). *Deriving inflation expectations from nominal and inflation-indexed Treasury yields* (Finance and Economics Discussion Series N° 33). Board of Governors of the Federal Reserve System (U. S.).
- Sargent, T. J. (1987). *Dynamic macroeconomic theory*. MIT Press.
- Sarte, P.-D. G. (1998). Fisher's equation and the inflation risk premium in a simple endowment economy. *Economic Quarterly*, Fall, 53-72.

ANEXOS

Anexo 1. Relación entre el modelo afín de estructura a término y el modelo de estado espacio

En este Anexo se muestra la relación entre los parámetros del modelo de estado espacio definido en (16) y (17) y un modelo afín de estructura a término.

La metodología usada para la generación de estos parámetros corresponde a la utilizada por García y Werner (2008). El procedimiento consiste en obtener los parámetros de interés a partir de la definición de los precios de los bonos en función del factor de descuento estocástico y posteriormente de la tasa de interés y del vector de estado. A continuación se describe este proceso aplicado a los bonos reales y nominales.

A1.1 Bonos reales

El precio de un bono real en t con un período de maduración $n = 1$ es el valor esperado del factor de descuento estocástico en $t + 1$. **Es decir:**

$$P_t^{real,1} = E_t \left(M_{t+1}^{real} \right). \quad (A1)$$

Sustituyendo el factor de descuento estocástico en la ecuación anterior por la ecuación (10), aplicando propiedades de la distribución normal y log-normal y reemplazando (13), se obtiene:

$$P_t^{real,1} = \exp \left(-r_t^{real} \right) = \exp \left(-\delta_0 - \delta_1' \mathbf{X}_t \right).$$

Si se compara la anterior ecuación con una función afín exponencial de forma $P_t^{real,1} = \exp \left(A_1^{real} + \mathbf{B}_1^{real'} \mathbf{X}_t \right)$, se obtienen los valores de los parámetros para $n = 1$:

$$A_1^{real} = -\delta_0 \quad \mathbf{B}_1^{real'} = -\delta_1. \quad (A2)$$

En general, el precio en t de un bono con $n + 1$ periodos de maduración está dado por:

$$P_t^{real,n+1} = E_t \left(M_{t+1}^{real} P_{t+1}^{real,n} \right)$$

$$P_t^{real,n+1} = E_t \left[\exp \left(-r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} \right) \exp \left(A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} \mathbf{X}_{t+1} \right) \right].$$

Sustituyendo (17) en la ecuación anterior:

$$P_t^{real,n+1} = E_t \exp \left(\left[-r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\mu + \Phi \mathbf{X}_t + \Sigma \varepsilon_{t+1}) \right] \right)$$

$$P_t^{real,n+1} = \exp \left(-r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\mu + \Phi \mathbf{X}_t) \right) E_t \left[\exp \left((\mathbf{B}_n^{real'} \Sigma - \lambda_t') \varepsilon_{t+1} \right) \right].$$

Usando propiedades de la distribución normal, se obtiene:

$$P_t^{real,n+1} = \exp \left(\begin{array}{l} -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\mu + \Phi \mathbf{X}_t) + \\ \frac{1}{2} (\mathbf{B}_n^{real'} \Sigma - \lambda_t') (\mathbf{B}_n^{real'} \Sigma - \lambda_t')' \end{array} \right).$$

Reemplazando $P_t^{real,n+1}$ por $\exp(A_{n+1}^{real} + \mathbf{B}_{n+1}^{real'} \mathbf{X}_t)$ y sustituyendo λ_t y r_t^{real} según las expresiones (12) y (13):

$$\exp(A_{n+1}^{real} + \mathbf{B}_{n+1}^{real'} \mathbf{X}_t) = \exp \left(\begin{array}{l} -\delta_0 + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\mu - \Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n^{real'} \Sigma \Sigma \mathbf{B}_n^{real'} + \\ (\mathbf{B}_n^{real'} (\Phi - \Sigma \lambda_1) - \delta_1') \mathbf{X}_t \end{array} \right).$$

Finalmente, al igualar los términos constantes y los términos que premultiplican a \mathbf{X}_t , se tiene:

$$A_{n+1}^{real} = -\delta_0 + A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\mu - \Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n^{real'} \Sigma \Sigma \mathbf{B}_n^{real'} \quad (A3)$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{real'} = -\delta_1' + \mathbf{B}_n^{real'} (\Phi - \Sigma \lambda_1)$$

Las expresiones presentadas en (A3) representan unas ecuaciones recursivas para los parámetros de interés. Utilizando esta recursión y los valores iniciales dados en (A2), se encuentra la siguiente solución:

$$\mathbf{B}_j^{real'} = -\sum_{i=1}^j \delta_1' (\Phi - \Sigma \lambda_1)^{i-1}, \quad (\text{A4})$$

$$A_j^{real} = -j\delta_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{real'} (\mu - \Sigma \lambda_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{real'} \Sigma \Sigma \mathbf{B}_i^{real'}, \quad (\text{A5})$$

para $j = 2, \dots, n$.

A1.2. Bonos nominales

Para generar el precio de los bonos nominales se usa el factor de descuento nominal especificado en (11).

El precio de este bono está definido como:

$$P_t^{nom,1} = \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t)$$

$$P_t^{nom,1} = E_t \left[\exp \left(-r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} - \mathbf{e}_n' \mathbf{X}_{t+1} \right) \right].$$

Reemplazando a r_t^{real} y \mathbf{X}_t por las expresiones (13) y (17) y reorganizando los términos, se obtiene:

$$\exp \left(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t \right) = E_t \left[\exp \left(-\delta_0 - (\delta_1 + \mathbf{e}_n' \Phi) \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \mathbf{e}_n' \mu - (\lambda_t' + \mathbf{e}_n' \Sigma) \varepsilon_{t+1} \right) \right]$$

$$\exp \left(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t \right) = \exp \left(-\delta_0 - (\delta_1' + \mathbf{e}_n' \Phi) \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \mathbf{e}_n' \mu \right) E_t \left[\exp \left(-(\lambda_t' + \mathbf{e}_n' \Sigma) \varepsilon_{t+1} \right) \right].$$

Resolviendo el operador de expectativas y sustituyendo λ_t por (12), se tiene:

$$\exp \left(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t \right) = \exp \left(-\delta_0 - (\delta_1' + \mathbf{e}_n' \Phi) \mathbf{X}_t - \mathbf{e}_n' \mu + \frac{1}{2} \mathbf{e}_n' \Sigma \Sigma \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n' \Sigma \lambda_0 + \mathbf{e}_n' \Sigma \lambda_1 \mathbf{X}_t \right). \quad (\text{A6})$$

Igualando los términos constantes y los términos premultiplicados por \mathbf{X}_t :

$$A_1^{nom} = -\delta_0 - \mathbf{e}_n' \mu + \frac{1}{2} \mathbf{e}_n' \Sigma \Sigma \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n' \Sigma \lambda_0$$

$$\mathbf{B}_1^{nom'} = \mathbf{e}_n' \Sigma \lambda_1 - (\delta_1' + \mathbf{e}_n' \Phi). \quad (\text{A7})$$

En general, el precio de un bono con período de maduración $n + 1$ se puede definir como:

$$\begin{aligned} P_t^{nom,n+1} &= \exp\left(A_{n+1}^{nom} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t\right) \\ &= E_t\left[M_{t+1}^{nom} P_{t+1}^{nom,n}\right] \\ &= E_t\left[\exp\left(-\delta_0 - \delta_1' \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} - \mathbf{e}_n' \mathbf{X}_{t+1} + A_n^{nom} + \mathbf{B}_n^{nom'} \mathbf{X}_{t+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo a \mathbf{X}_{t+1} , según (17), en la ecuación anterior:

$$\exp\left(A_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t\right) = E_t \left[\exp \left(\begin{aligned} & -\delta_0 - \delta_1' \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + \left(\left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) \Sigma - \lambda_t' \right) \varepsilon_{t+1} \\ & + A_n^{nom} + \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) \mu + \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) \Phi \mathbf{X}_t \end{aligned} \right) \right].$$

Resolviendo el operador de expectativas y sustituyendo λ_t según (12):

$$\exp\left(A_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t\right) = \exp \left[\begin{aligned} & -\delta_0 + A_n^{nom} + \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) (\mu - \Sigma \lambda_0) + \\ & \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) \Sigma \Sigma \left(\mathbf{B}_n^{nom} - \mathbf{e}_n \right) + \\ & \left(\left(\mathbf{B}_n^{nom} - \mathbf{e}_n' \right) \Phi - \delta_1' - \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) \Sigma \lambda_1 \right) \mathbf{X}_t \end{aligned} \right].$$

Finalmente, igualando los términos constantes y los términos que premultiplican a \mathbf{X}_t en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$A_{n+1}^{nom} = -\delta_0 + A_n^{nom} + \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) (\mu - \Sigma \lambda_0) - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) \Sigma \Sigma \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right)', \quad (\text{A8})$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{nom'} = \left(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n' \right) (\Phi - \Sigma \lambda_1) - \delta_1'. \quad (\text{A9})$$

Al igual que en el caso real, es posible llegar a una solución general a partir de las ecuaciones (A7), (A8) y (A9):

$$\mathbf{B}_j^{nom'} = -\sum_{i=1}^j \delta_1' (\Phi - \Sigma \lambda_1)^{i-1} - 1_{(j>2)} \sum_{i=1}^{j-2} \mathbf{e}_n' (\Phi - \Sigma \lambda_1)^i + \mathbf{e}_n' [-\Phi - \mathbf{I}_n + \Sigma \lambda_1] (\Phi - \Sigma \lambda_1)^{j-1} \quad (\text{A10})$$

$$A_j^{nom} = -j\delta_0 - j\mathbf{e}_n' (\mu - \Sigma \lambda_0) + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{nom'} (\mu - \Sigma \lambda_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \left(\mathbf{B}_i^{nom'} \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_i^{nom} - \mathbf{e}_n) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{j-1} \mathbf{e}_n' \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_i^{nom} - \mathbf{e}_n) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_n' \Sigma \Sigma \mathbf{B}_1^{nom}, \quad (\text{A11})$$

para $j = 2, \dots, n$, donde $\mathbf{1}_A$ denota la función característica evaluada en el subconjunto A .

A1.3. Relación entre en modelo afín de estructura a término y los parámetros del modelo de estado y espacio

Suponiendo que los rendimientos se pueden expresar como una función afín del vector de estado \mathbf{X}_t , de la siguiente forma:

$$y_t^{k,n} = -\frac{1}{n} \log(P_t^{k,n})$$

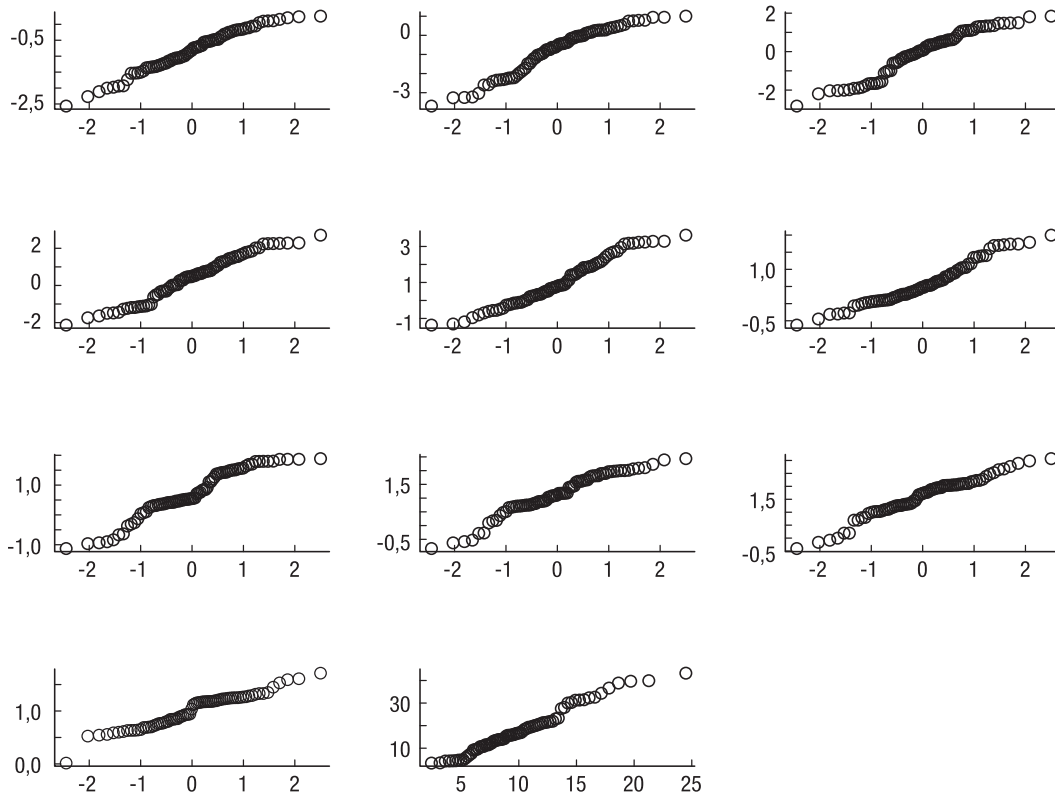
$$y_t^{k,n} = -\frac{1}{n} \left(A_n^k + \mathbf{B}_n^{k'} \mathbf{X}_t \right),$$

para $k = nom, real$, los parámetros de \mathbf{d} y Z de la ecuación de medida del modelo de estado espacio, asociados con los rendimientos, pueden reemplazarse por los resultados obtenidos en (A4), (A5), (A10) y (A11), tal como se indica en la ecuación (18).

Anexo 2. Pruebas de especificación del modelo

GRÁFICO A2.1. GRÁFICOS CUANTIL-CUANTIL UNIVARIADOS Y MULTIVARIADOS

Las primeras diez figuras corresponden a los gráficos QQ de cada uno de los residuales de la ecuación de medida, mientras que la figura final corresponde al gráfico QQ multivariada asociada a estos residuos.

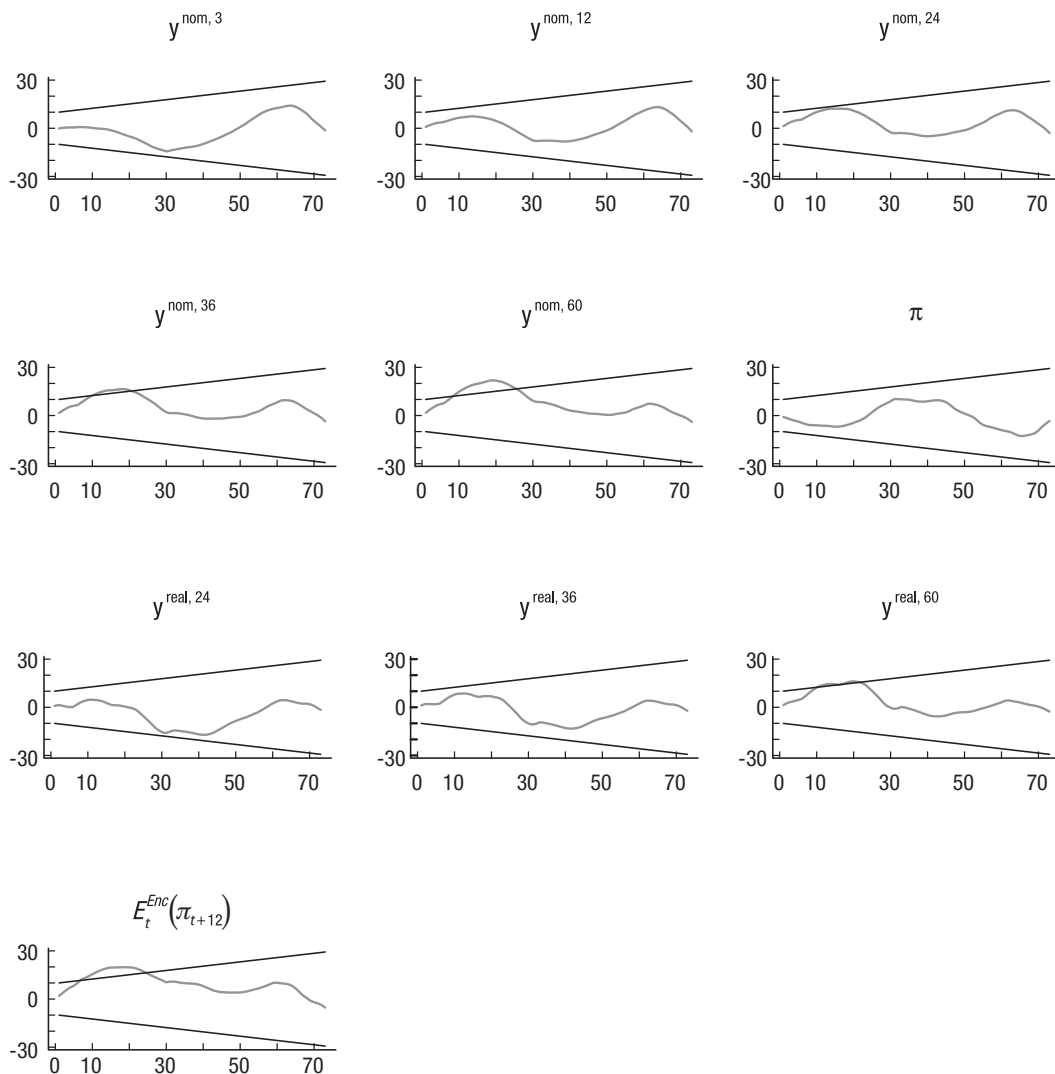


Fuente: cálculos de los autores.

En el Gráfico 2 se muestran los gráficos cuantil-cuantil de los residuos asociados a η de la ecuación (16). En el eje horizontal se encuentran los cuantiles teóricos de la distribución normal, y en el vertical los cuantiles empíricos de la variable considerada. Si esta variable tiene una distribución normal, se espera que el gráfico corresponda a una recta de 45 grados. Los gráficos univariados muestran que los **componentes de $\hat{\eta}$** no presentan desviaciones fuertes con respecto a una distribución normal y lo mismo sucede con respecto a una distribución normal multivariada, como se puede observar en el último gráfico.

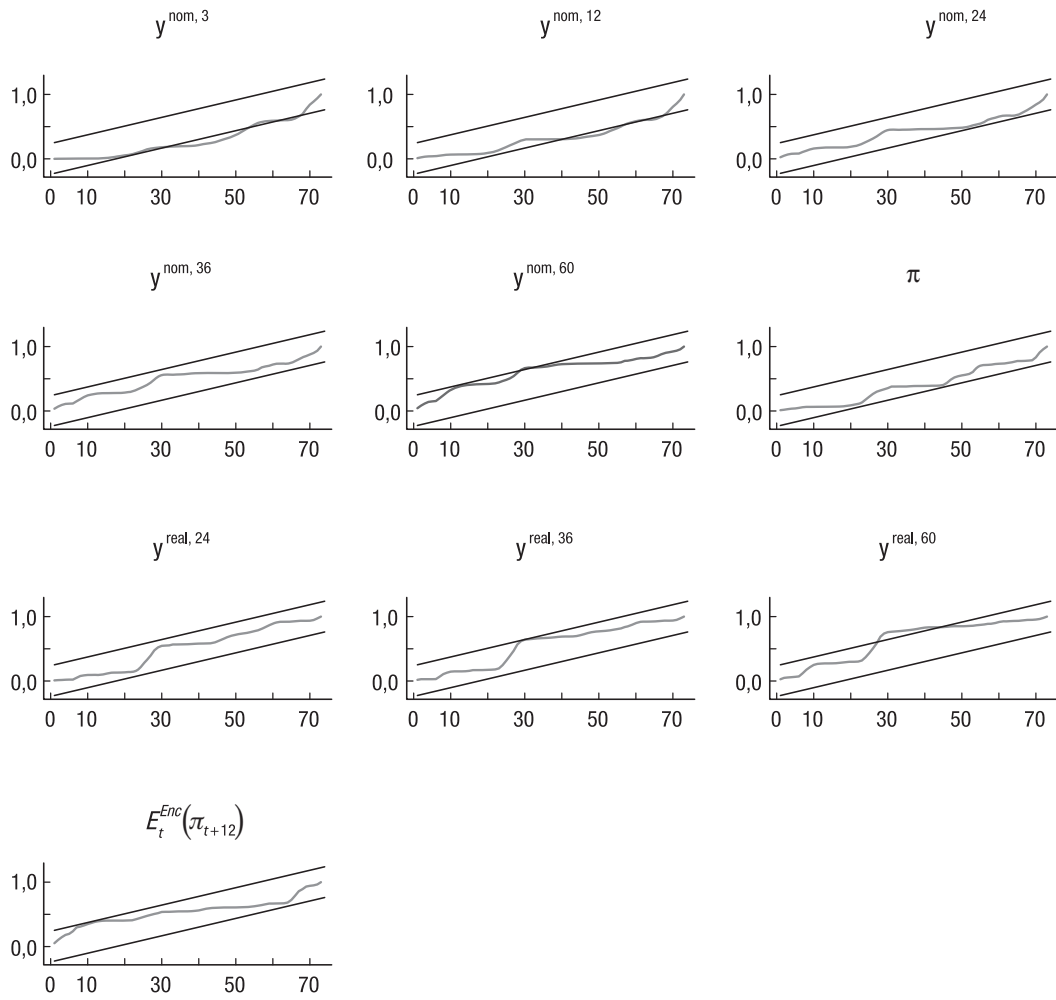
Los Gráficos 3 y 4 muestran los valores de los estadísticos *cusum* y *cusum* cuadráticos con bandas de significancia al 1%. Estos gráficos presentan las sumas acumuladas y sumas cuadráticas acumuladas de los residuos del modelo para diferentes períodos de maduración. Estos resultados indican que no existen mayores problemas de especificación del modelo, ya que los valores de los estadísticos se encuentran, por lo general, dentro de las bandas de significancia.

GRÁFICO A2.2. GRÁFICOS *CUSUM* DE LOS ERRORES DE PREDICCIÓN



Fuente: cálculos de los autores.

GRÁFICO A2.3. GRÁFICOS *CUSUM* CUADRÁTICOS DE LOS ERRORES DE PREDICCIÓN



Fuente: cálculos de los autores.

Anexo 3. Descomposición del break even inflation

En este anexo se deduce la ecuación (3), donde se descompone el BEI en tres partes: expectativas promedio de inflación, prima por riesgo inflacionario y ajuste por convexidad.

A partir de los conceptos utilizados en secciones anteriores, se tiene que el precio de un bono real está dado por:

$$P_t^{real,n} = E_t \left[\prod_{j=1}^n M_{t+j}^{real} \right], \quad (A12)$$

donde M_t^{real} es el factor de descuento estocástico. Teniendo en cuenta que $y_t^{real,n} = -\frac{1}{n} \log(P_t^{real,n})$, la ecuación anterior se puede representar de la siguiente forma:

$$y_t^{real,n} = -\frac{1}{n} \log \left[E_t \left(\prod_{j=1}^n M_{t+j}^{real} \right) \right]. \quad (A13)$$

Dado que $m_t^{real} = \log(M_t^{real})$, suponiendo que $m_t^{real} \sim NID$ y utilizando propiedades de la distribución normal y log-normal¹³, se obtiene:

$$y_t^{real,n} = -\frac{1}{n} \left[E_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \right]. \quad (A14)$$

Análogamente para los bonos nominales:

$$P_t^{nom,n} = E_t \left[\prod_{j=1}^n M_{t+j}^{nom} \right]. \quad (A15)$$

Además:

$$y_t^{nom,n} = -\frac{1}{n} \left[E_t \left(\sum_{j=1}^n (m_{t+j}^{real} - \pi_{t+j}) \right) + \frac{1}{2} \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n (m_{t+j}^{real} - \pi_{t+j}) \right) \right]. \quad (A16)$$

¹³ Si $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $e^x \sim \text{LogN}$, con $E(e^x) = e^{\mu+0,5\sigma^2}$ y $V(e^x) = e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$.

Calculando el BEI como la diferencia entre los rendimientos y desarrollando el operador de varianza:

$$y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = \frac{1}{n} E_t \left[\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right] - \frac{1}{2n} \left[\text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) + \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right) - 2 \text{Cov}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real}, \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right) - \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \right]. \quad (A17)$$

Eliminando términos semejantes, se tiene:

$$y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = \underbrace{\frac{1}{n} E_t \left[\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right]}_{\text{Inflación esperada promedio}} + \underbrace{\frac{1}{n} \text{Cov}_t \left(\sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real}, \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right)}_{\text{Prima por riesgo inflacionario}} - \underbrace{\frac{1}{2n} \text{Var}_t \left(\sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right)}_{\text{Ajuste por convexidad}}. \quad (A18)$$

La ecuación (A18) indica la descomposición del BEI en los factores especificados en las ecuaciones (3) y (4).