

Ensayos

sobre POLÍTICA ECONÓMICA



EL COSTO DE LOS CICLOS ECONÓMICOS EN
COLOMBIA: UNA NUEVA ESTIMACIÓN

MAURICIO A. HERNÁNDEZ M.
MUNIR A. JALIL B.
CARLOS ESTEBAN POSADA P.

ENSAYOS SOBRE POLÍTICA ECONÓMICA,
VOL. 25, NÚM. 53,
EDICIÓN ESPECIAL PRODUCTIVIDAD Y CRECIMIENTO
PP. 288-335

Los derechos de reproducción de este documento son propiedad de la revista Ensayos Sobre Política Económica (ESPE). El documento puede ser reproducido libremente para uso académico, siempre y cuando no se obtenga lucro por este concepto y además, cada copia incluya la referencia bibliográfica de ESPE. El(los) autor(es) del documento puede(n) además poner en su propio website una versión electrónica del mismo, pero incluyendo la referencia bibliográfica de ESPE. La reproducción de esta revista para cualquier otro fin, o su colocación en cualquier otro website, requerirá autorización previa de su Editor de ESPE.

THE COLOMBIAN BUSINESS CYCLE COST: A NEW APPRAISAL

MAURICIO A. HERNÁNDEZ M.
MUNIR A. JALIL B.
CARLOS ESTEBAN POSADA P.*

* The opinions contained in this paper are those of the authors and do not represent those of the Banco de la República or its Board of Directors. The authors thank comments by two anonymous referees, from Luis Eduardo Arango, Javier Gómez and Luis Lorente. Also, they thank the statical information provided by Carlos Pombo and Luis H. Gutierrez.

Respectively, the authors are: instructor of the Facultad de Economía de la Escuela de Ciencias Estratégicas de la Universidad Pontificia Bolivariana (Medellín), Researcher, and Senior Researcher from the Research Unit of Banco de la República.

E-mails: mhernamo@gmail.com; mjalilba@banrep.gov.co; cposadpo@banrep.gov.co.

Document received 18 July 2006; final version accepted 17 October 2006.

Colombian economic cycles from the second half of the 20th century implied significant variations in real aggregates of the economy. Starting from a model with a technology of production AK and a production function of capital goods that presents diminishing returns to investment, we calculated the cost of economic fluctuations in terms of consumption and welfare for the households. According to our results, under economic stability the long term growth rate of per capita consumption would be increased between 0.13 and 0.47 percentage points. Finally, depending on the different levels of the intertemporal elasticity of substitution of consumption, the required compensation to make the households' welfare on both paths (fluctuating and stable) equivalent would be, on average, 4.7% of initial consumption.

JEL classification: D61, E32.

Keywords: business cycle cost, welfare.

EL COSTO DE LOS CICLOS ECONÓMICOS EN COLOMBIA: UNA NUEVA ESTIMACIÓN

MAURICIO A. HERNÁNDEZ M.
MUNIR A. JALIL B.
CARLOS ESTEBAN POSADA P.*

Los ciclos económicos colombianos de la segunda mitad del siglo XX implicaron considerables variaciones en los agregados reales de la economía. A partir de un modelo con tecnología de producción AK y una función de producción de bienes de capital, que presenta retornos decrecientes para la inversión, se calculó el costo de las fluctuaciones económicas en términos de consumo y bienestar de las familias. Según nuestros resultados, bajo estabilidad económica la tasa de crecimiento de largo plazo del consumo per cápita se habría incrementado entre 0,13 y 0,47 puntos porcentuales, pasando de 1,4% por año, en el escenario fluctuante, a una tasa en el intervalo entre 1,53% y 1,87% anual. De acuerdo con diferentes niveles de la elasticidad intertemporal de sustitución del consumo, la compensación necesaria para hacer que las familias obtuvieran un mismo bienestar bajo los dos escenarios (fluctuante y estable) equivaldría, en promedio, a 4,7% del consumo inicial.

Clasificación JEL: D61, E32.

Palabras clave: fluctuaciones, costo de los ciclos, bienestar.

* Las opiniones, cálculos y demás estimaciones contenidos en este documento son de la responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen al Banco de la República ni a sus directivas. Los autores agradecen la colaboración y los comentarios de dos evaluadores anónimos, y de Luis Eduardo Arango, Javier Gómez y Luis Lorente. Se agradece, además, la información estadística suministrada por Carlos Pombo y Luis H. Gutiérrez.

En su orden, los autores son: docente de la Facultad de Economía de la Escuela de Ciencias Estratégicas de la Universidad Pontificia Bolivariana Sede Medellín investigador, e investigador principal de la Unidad de Investigaciones del Banco de la República

Correos electrónicos: mhernamo@gmail.com; mjalilba@banrep.gov.co; cposadpo@banrep.gov.co

Documento recibido el 18 de julio de 2006; versión final aceptada el 17 de octubre de 2006.

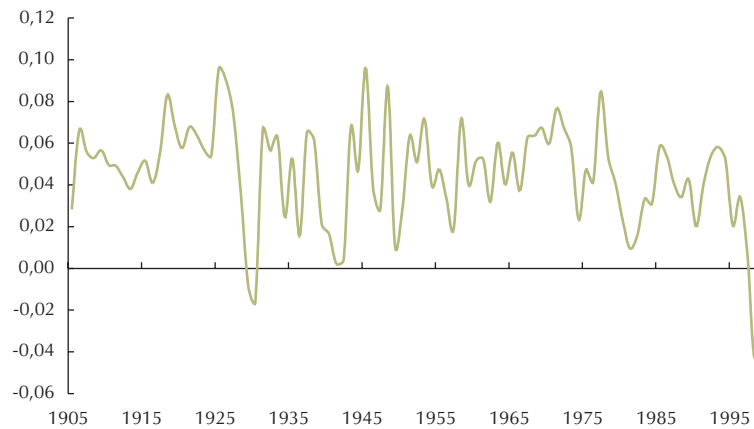
I. INTRODUCCIÓN

La trayectoria del crecimiento colombiano no ha sido constante, ya que los agregados reales de la economía en el siglo XX presentaron fluctuaciones significativas. Los ciclos económicos han sido uno de los rasgos característicos del desarrollo de la economía colombiana (Gráfico 1); a este respecto, Posada (1999) afirmó que fueron tres los factores que generaron las fluctuaciones en la segunda mitad del siglo XX: cambios en los términos de intercambio, crecimiento de la base monetaria e incremento del gasto público. Suescún (1997) reportó una correspondencia entre las bonanzas cafeteras y el comportamiento cíclico de la economía, también en la segunda mitad del siglo XX. Con todo, Cárdenas (1992) observó que el carácter anticíclico de la política fiscal y la estabilización del precio interno del café explican por qué las fluctuaciones del consumo privado en Colombia no fueron tan fuertes como en otros países cafeteros.

Misas y Posada (2000) trataron de evaluar la importancia de las variables de oferta en las fluctuaciones económicas desde 1925 hasta 1998. Sus resultados indicaron que un choque positivo (y autónomo) en el producto, probablemente un indicador de impactos por el lado de la oferta agregada, fue el componente más importante en las fluctuaciones económicas¹, y un choque positivo en los términos de intercambio

1 Algunos análisis con base en modelos de simulación numérica (calibración), siguiendo el enfoque de los “ciclos económicos reales”, tales como los de Hamann y Riascos (1998), y Arango (1998) y Hamann (2002a y 2002b), han mostrado que la hipótesis según la cual los ciclos económicos colombianos obedecen a choques de oferta (específicamente, alteraciones aleatorias de la productividad) no podría rechazarse si se juzgara por la comparación entre los resultados generados por

Gráfico 1
Tasa de crecimiento del producto, 1905-2000



Fuente: Greco, 2002.

tuvo efectos positivos permanentes sobre el gasto público. Zuccardi (2002) encontró que, para el período 1983-2001, sólo las variables de oferta, producción y términos de intercambio influyeron en el comportamiento de largo plazo del crecimiento, y las variables de demanda explicarían las fluctuaciones de corto plazo.

El Cuadro 1 muestra las autocorrelaciones de primer orden y la correlación contemporánea entre el producto y sus principales componentes como un reflejo de la trayectoria de los ciclos económicos colombianos en la segunda mitad del siglo XX. Se podría decir que la posición cíclica de las variables en cada período depende significativamente de los sucesos de un período atrás, a juzgar por la autocorrelación de primer orden de la mayor parte de las series, reflejando elementos de persistencia en éstas; a su vez, la correlación contemporánea entre las variaciones del producto y sus componentes muestra una correspondencia moderada. Según esto, el consumo y la productividad del capital son los elementos que presentan una mayor concordancia con el componente cíclico del PIB y con el gasto público, mostrando la más alta independencia.

tales modelos y los comportamientos (medias, varianzas y correlaciones) de los componentes cíclicos de las principales variables agregadas de las Cuentas Nacionales.

Cuadro 1
 Estadísticas de los ciclos económicos colombianos, 1950-2002

Componente cíclico de las variables	Autocorrelación de primer orden	Correlación contemporánea con el producto
Producto (Y)	0,6923	1,0000
Consumo (C) ^{a/}	0,6367	0,9073
Inversión (I)	0,5911	0,5554
Gasto público (G) ^{b/}	0,4709	0,4030
Exportaciones	0,4459	0,4529
Importaciones	0,7221	0,6123
Capital físico (K)	0,6988	0,4114
Productividad del capital (Y/K)	0,7176	0,7296

Nota: todos los cálculos se hicieron con los componentes cíclicos del logaritmo de las variables per cápita, dichos componentes fueron calculados mediante el filtro de Hodrick-Prescott.

a/ Consumo de bienes durables y no durables.

b/ Datos entre 1970-2002.

Fuente: las series son de Greco (2002); las especificaciones del cálculo de cada una de ellas se darán a lo largo del trabajo.

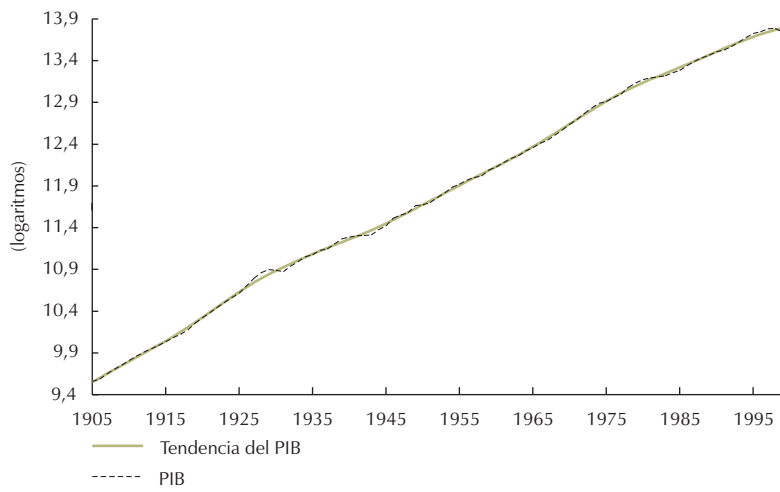
De la misma forma, si analizamos la serie del PIB anual desde 1905 hasta 2000 (gráficos 1 y 2), construida por el Greco (2002), podemos visualizar los ciclos de la economía colombiana a lo largo del siglo XX. El método más utilizado (y presentado aquí) para calcular los ciclos de una variable es el filtro de Hodrick-Prescott (filtro HP), mediante el cual se puede obtener la tendencia del PIB. La diferencia entre el PIB y esta tendencia es igual al ciclo recorrido por el producto a través del tiempo (Gráfico 2). Igualmente, con la serie trimestral disponible para el PIB entre 1977-2003², podemos localizar los grandes puntos de corte en el ciclo económico colombiano en este período (Gráfico 3). En este ejercicio se observan tres ciclos completos y el inicio de otro.

Sin duda, las características del ciclo colombiano dan lugar a preguntarse qué tan costosas han sido estas fluctuaciones para el bienestar de las familias, pues la trayectoria del crecimiento económico afecta definitivamente su senda de consumo y sus decisiones de inversión. Y aunque el país casi nunca presentó tasas negativas de crecimiento en el producto real total, lo cual sólo sucedió en 1931 y 1999, aquí se sostiene que una tasa positiva de crecimiento de largo plazo no es suficiente para garantizar un nivel

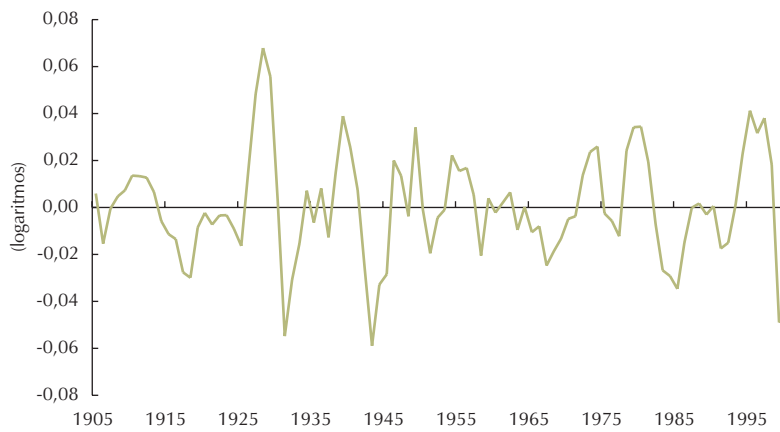
² Serie construida por el Departamento Nacional de Planeación para el período 1977-2003. La serie se desestacionalizó para realizar las pruebas correspondientes.

Gráfico 2
Tendencia y ciclo del PIB anual, 1905-2000

A. PIB y su tendencia



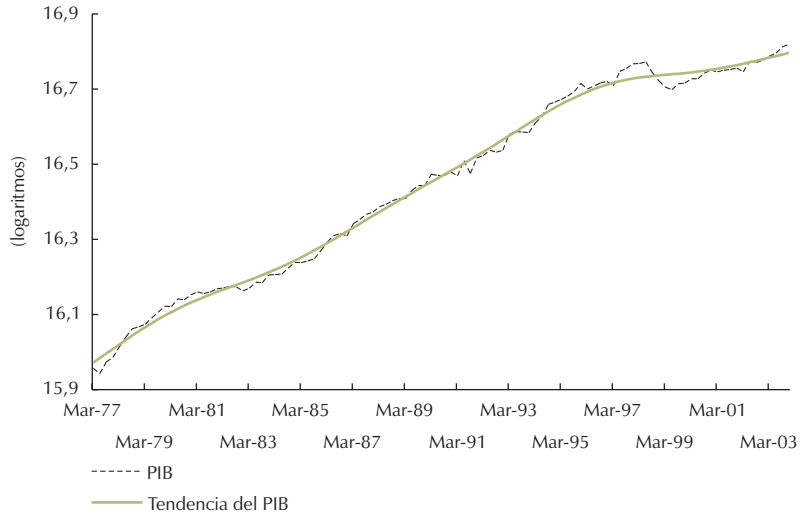
B. Ciclo del PIB



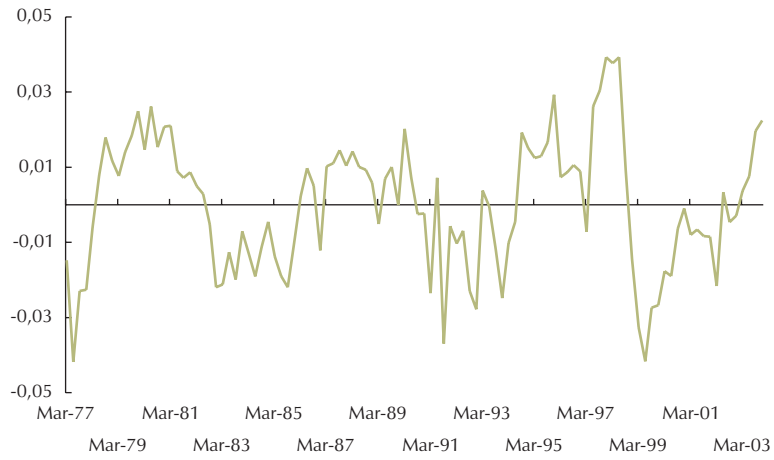
Fuente: Greco (2002), tendencia estimada a través del filtro de Hodrick-Prescott.

Gráfico 3
Tendencia y ciclo del PIB trimestral, 1977-2003

A. PIB y su tendencia



B. Ciclo del PIB



Fuente: DNP, tendencia estimada a través del filtro de Hodrick-Prescott.

máximo de bienestar para las familias; además, los ciclos económicos podrían traer consigo altos costos en términos de bienestar.

No obstante, demostrar que los ciclos tienen un efecto significativo sobre el bienestar de las familias sería solamente una razón necesaria, mas no suficiente, para recomendar políticas de intervención. En efecto, choques provenientes del lado de la oferta agregada, efectos neutralizantes de las anticipaciones de los agentes privados, problemas de información y los casos de países pequeños con sus economías abiertas dan lugar a la ausencia de bases sólidas para establecer mecanismos estatales de estabilización y, por el contrario, pueden conducir a políticas anticíclicas de efectos desestabilizantes³.

En este orden de ideas se ubica el objetivo de este artículo, en donde se pretende calcular nuevamente el costo de los ciclos económicos en Colombia entre 1950 y 1998 y entre 1950 y 2002 siguiendo la metodología propuesta por Barlevy (2004). Los resultados encontrados sugieren un costo de las fluctuaciones en la tasa de crecimiento anual del consumo per cápita entre 0,13 y 0,47 puntos porcentuales (pp), es decir, la tasa media anual de crecimiento de largo plazo, que fue 1,4%, se incrementaría a 1,53%, en el escenario más pesimista, y a 1,87%, en el mejor de los casos. En términos específicos, los agentes considerarían indiferentes las trayectorias observada (fluctuante) y estable si se les hubiera compensado con un consumo adicional equivalente, en promedio, a 4,7% del observado en 1950.

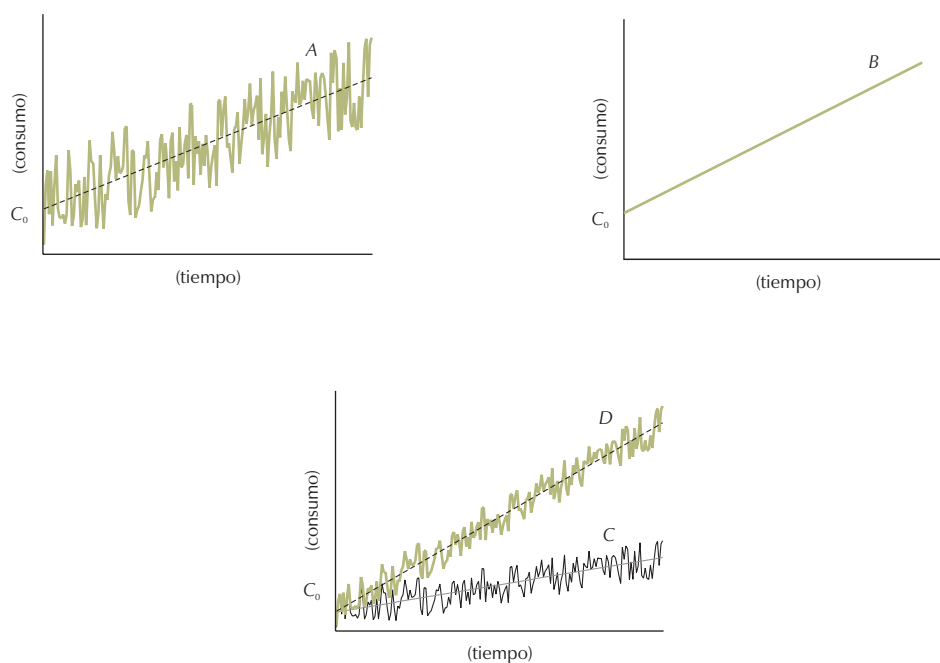
El artículo está dividido en seis secciones, además de esta introducción. En la sección II se busca relacionar este trabajo con otros estudios hechos en el país y en los Estados Unidos; en la siguiente se expone el modelo que será utilizado y se realizan algunas interpretaciones de los resultados analíticos; en la sección IV se realiza la estimación del costo de los ciclos por medio de una regresión *switching*. Luego, en la sección V se presentan las precisiones que corresponden a la aplicación anterior, a partir de tres medidas diferentes para la volatilidad de la inversión; enseguida, en la sección VI se utilizan los datos estimados en los acápite anteriores sobre el costo de los ciclos en términos de aumento de la tasa de crecimiento del consumo per cápita para estimar la pérdida de bienestar del agente representativo. Por último, en la sección final se sintetiza y concluye.

3 Los capítulos 4 ("Stabilization Policy: Can we?") y 5 ("Stabilization Policy: Should we?") de Minford y Peel (2002) son especialmente útiles al respecto.

II. REVISIÓN DE TRABAJOS ANTERIORES

De acuerdo con sus conclusiones, los trabajos se dividen en dos tipos: aquellos que aseguran que los ciclos económicos traen efectos despreciables sobre el bienestar de los hogares y, de otro lado, los que apoyan la idea de que las fluctuaciones traen consecuencias considerables en el bienestar general. El estudio más famoso entre los primeros es el de Lucas (1987), quien parte de un agente representativo con aversión al riesgo que debe elegir dos sendas diferentes en el consumo: una con fluctuaciones alrededor de su tendencia, y otra estable. La conclusión de Lucas es que las fluctuaciones económicas no traen costos considerables en el bienestar de las familias; así, para él no es la desviación del producto con respecto a su tendencia lo que importa, sino sólo el ritmo de crecimiento, el cual a largo plazo sí traería fuertes impactos sobre el nivel de bienestar de las familias (Gráfico 4).

Gráfico 4
Cambios en el bienestar según Lucas: estabilización frente a crecimiento



Nota: para Lucas los consumidores aversos al riesgo mejoran su bienestar si se pasa de A a B; pero la mejora en bienestar es pequeña. Lo que explica una mejora grande de bienestar es pasar de C a D (lo que importa es el crecimiento, no el ciclo).
Fuente: Lucas (1987).

Para medir esta pérdida de bienestar Lucas se preguntó: ¿a qué fracción constante del consumo de cada año el consumidor renunciaría para evitar las fluctuaciones? Suponiendo una aversión al riesgo bastante alta, el cálculo arrojó resultados mínimos: 0,17%, es decir, para el período de posguerra el agente estaría dispuesto a pagar 0,17% del consumo global para eliminar completamente la variabilidad del mismo; éste sería el mejoramiento en el nivel de bienestar gracias a una estabilización de las condiciones económicas. Por otra parte, estudiando problemas de crecimiento Lucas calculó que el individuo renunciaría incluso hasta un 20% de su consumo total para incrementar la tasa promedio de crecimiento en 1 pp; así, Lucas estaría comprobando, para el caso de los Estados Unidos, que el crecimiento importa, pero los ciclos de negocios no, por tanto, la política económica no debería concentrarse en los fenómenos de corto plazo.

Para el caso colombiano, Gómez (1992) hizo una medición del costo de las fluctuaciones para el período 1965-1989 siguiendo la ruta abierta por Lucas (1987): la metodología consistió en hallar una tasa de compensación (como porcentaje del consumo), la cual se suma al consumo del individuo en todos los momentos y realizaciones, y logra que éste iguale la utilidad en los dos escenarios: economía fluctuante y estabilidad⁴. Según este procedimiento, el costo de las fluctuaciones aumenta en tanto mayores sean la aversión al riesgo del agente y las fluctuaciones en el consumo. Gómez calculó un costo de la inestabilidad del consumo igual a un 2,5% del mismo (p. 198, Cuadro 3), utilizando una aversión al riesgo similar a la propuesta por Lucas ($\sigma = 20$) y una desviación estándar del consumo con respecto a su tendencia (σ_y) igual a 0,05.

Siguiendo este mismo método de aproximación, aunque con algunas variaciones en la especificación de la senda del consumo, Cárdenas (1992) encontró resultados similares para el período 1925-1990. Dado un coeficiente de aversión al

4 Las siguientes son las ecuaciones que hacen parte de la modelación enunciada:

La función de utilidad: $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} [c_t^{1-\gamma} - 1]$, siendo γ la aversión al riesgo, c_t el consumo y β el factor de descuento.

El patrón original de consumo: $c_t = (1 + \mu)^t z_t$, siendo μ la tasa de crecimiento tendencial del consumo y z_t una variable aleatoria, con $c_0 = 1$. En un ambiente estable el plan de consumo es $c_t = (1 + \mu)^t E(z_t)$.

Algebraicamente, la compensación a la que se refiere el enunciado anterior queda expresada así:

$$E \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} \left[((1+\lambda)(1+\mu)^t z_t)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\gamma} \left[((1+\mu)^t E[z_t])^{1-\gamma} - 1 \right]$$

Despejando para λ , se

tiene que: $\lambda = \frac{1}{2} \gamma \sigma_y^2$, siendo $y = \frac{z_t}{E[z_t]}$. λ es la tasa de compensación o el costo de las fluctuaciones.

riesgo igual a 20, la eliminación de las fluctuaciones alrededor de la tendencia del consumo aumentaría éste último en un 3,89%: utilizando una especificación para el consumo estacionaria en tendencia, bajo la cual los choques tienen efectos transitorios, o en un 5,57% utilizando una especificación estacionaria en diferencias, la cual acumula los choques a través del tiempo. El autor también hizo el cálculo para el período 1965-1989 para el caso del consumo de bienes no durables; aquí los resultados fueron menores: 2,73% o 0,70%, respectivamente, de acuerdo con cada especificación de la senda del consumo.

En el apartado final de su estudio, Cárdenas utilizó un modelo ARIMA, estimado para las series de consumo en Colombia, con el fin de calcular el costo de las fluctuaciones. El proceso consistió en simular 10.000 series diferentes de consumo generadas por este proceso ARIMA y luego calcular la utilidad intertemporal promedio correspondiente a las series resultantes en la estimación. Seguidamente, Cárdenas dedujo la utilidad que es lograda cuando los términos de perturbación del modelo son cero (es decir, cuando sólo se tienen en cuenta los términos autorregresivos del ARIMA). Con estas dos utilidades se halla el costo de la variabilidad del consumo como porcentaje de éste. Según esto, con un coeficiente de aversión igual a 20, para lograr la estabilidad en su senda el consumidor representativo estaría dispuesto a sacrificar 6,1% de su consumo para el período 1925-1990 (consumo privado total), o 0,86% entre 1965-1989 (consumo de bienes no durables).

Las conclusiones de Gómez (1992) y Cárdenas (1992) están de acuerdo con la de Lucas en cuanto a que el crecimiento es más importante que la estabilidad; sin embargo, el costo de las fluctuaciones encontrado por ellos para el caso colombiano es mucho mayor que el calculado por Lucas para los Estados Unidos, y se encuentra en el rango estimado por nosotros, como se verá más adelante.

El estudio de Barlevy (2004) se aparta de manera significativa del enfoque de Lucas: con sus cálculos, hechos para el período de posguerra en los Estados Unidos, llegó a resultados sustancialmente diferentes, pues concluyó que la eliminación de las fluctuaciones puede incrementar la tasa de crecimiento del consumo per cápita de los Estados Unidos entre 0,35 y 0,40 pp sin afectar el nivel inicial del consumo; lo cual implicó un costo de las fluctuaciones cien veces más grande que el sugerido por Lucas.

La valoración de estos impactos estuvo basada en un método *contrafactual*, es decir, se calculó el consumo logrado por el agente bajo un ambiente fluctuante (el

real), y se comparó con el consumo logrado en un ambiente estable (simulado). Las conclusiones diferentes entre este estudio y el de Lucas se basan en que, según Barlevy, las oscilaciones de las variables reales tienen una vía de transmisión que pasa por la disminución del crecimiento. Incluso si las fluctuaciones agregadas tuviesen *per se* un modesto efecto sobre la tasa de crecimiento de la economía, esto podría tener un efecto significativo sobre el bienestar⁵.

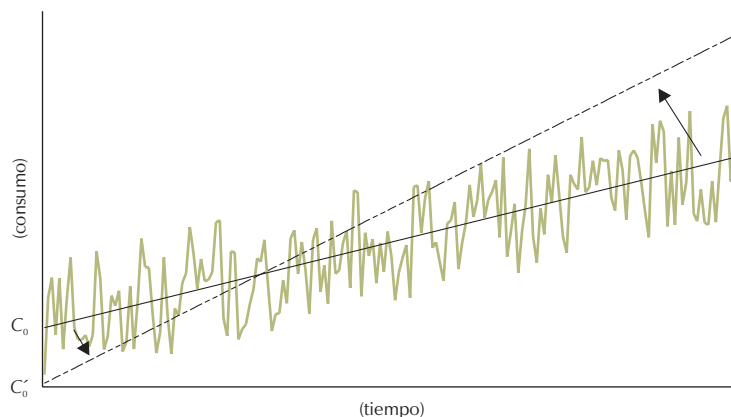
Trabajos anteriores para los Estados Unidos (véase Barlevy, 2004, p. 965) han tratado de medir el costo de los ciclos económicos siguiendo esta vía, pero con una limitación que Barlevy señala: utilizan una función para la inversión que presenta retornos constantes de escala. En estos intentos los efectos de las fluctuaciones sobre el crecimiento de largo plazo son descritos mediante cambios en la cantidad de recursos que son asignados a las actividades que intensifican el crecimiento en equilibrio (suponen más inversión en el momento en que es eliminada la fluctuación); así, si se eliminan las fluctuaciones se tendría un incremento en la inversión en actividades promotoras de crecimiento, y el consumo crecerá a una tasa más alta en los períodos posteriores, pero habrá una menor cantidad de recursos destinados al consumo inicial, lo que ocasiona la disminución del nivel inicial de consumo. Por tanto, el efecto total de la reducción de las fluctuaciones sobre el bienestar resulta ser más bien pequeño (o ambiguo): la mayor utilidad del mayor crecimiento del consumo posterior es contrarrestada por la desutilidad en el menor consumo inicial⁶ (Gráfico 5).

Según Barlevy, se debe recurrir a modelaciones de este problema que involucren mecanismos que limiten la inversión una vez eliminadas las fuentes de inestabilidad, esto significa que si se mide el costo de las fluctuaciones bajo el contrafactual de un escenario de estabilidad, en donde la inversión inicial permanezca fija, el aumento en el bienestar de las familias, debido a la eliminación de las fluctuaciones, será significativo (pues no habrá pérdidas de utilidad asociadas con la caída en el consumo inicial); por tanto, la pregunta correcta para

⁵ Es decir, se utiliza la idea intuitiva de Lucas según la cual una disminución en 1 pp de la tasa de crecimiento del consumo equivale a reducir el plan de consumo inicial en un 20%.

⁶ Incluso el bienestar puede disminuir en este escenario: si nos encontramos con un agente que valora mucho más el consumo presente que el futuro, descubriremos que su bienestar disminuirá ante la decisión de aumentar la inversión en el momento cero en detrimento del menor consumo; por tanto, cuando una estabilización económica es explicada por medio de aumentos iniciales de inversión, se tiene que los beneficios adicionales de este hecho son insignificantes o, paradójicamente, negativos.

Gráfico 5
Efectos de la estabilización bajo rendimientos constantes de la inversión

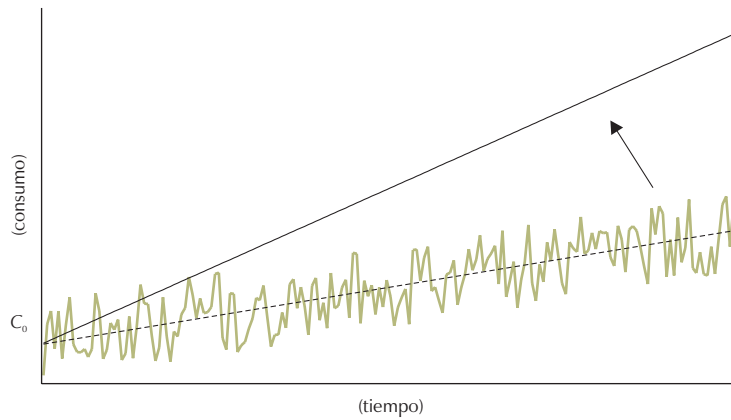


Nota: otros autores que han tratado de medir el costo de los ciclos bajo rendimientos constantes de la inversión no han conseguido grandes variaciones en el bienestar de los consumidores. La estabilización eleva la tasa de crecimiento, pero esto produce una caída inicial en el consumo porque se hará más rentable aumentar de manera sustancial, desde el principio (cuando se estabiliza), la tasa de inversión.

hallar los costos de las fluctuaciones debe ser la siguiente: ¿cuánto podría estar dispuesto a sacrificar un agente para obtener una senda de consumo que parta en el mismo nivel inicial, pero que crezca más rápidamente al eliminar las fluctuaciones? La clave de Barlevy para encontrar valoraciones altas en el costo de los ciclos estuvo en el marco teórico utilizado: recurrió a una tecnología AK , según la cual el crecimiento se basa en la acumulación de capital, y a una función para la producción de bienes de capital estrictamente cóncava, es decir, la tasa de crecimiento de la inversión presenta rendimientos decrecientes⁷ (Gráfico 6).

⁷ La intuición acerca de la razón de los retornos decrecientes de la inversión se basa en las decisiones de los agentes: supóngase un momento cero cuando ya han decidido óptimamente los niveles de consumo e inversión bajo un ambiente de fluctuaciones y en donde sucede una estabilización del ambiente económico (es decir, se sabe que no habrá más cambios y que se continuará con un nivel constante de la productividad en el tiempo). Como la inversión tiene rendimientos decrecientes y la decisión que se había tomado antes era óptima, no habrá motivos para que el agente cambie su decisión y restrinja su consumo en favor de la inversión (pues de aumentar ésta, tendría un rendimiento negativo en el margen), por lo cual será posible partir del mismo nivel de consumo que se había elegido anteriormente en el ambiente fluctuante. Es decir, la importancia de los rendimientos decrecientes de la inversión se basa en la restricción efectiva que impone sobre los agentes para que no inviertan más de lo que ya era óptimo y provoquen así resultados ambiguos sobre el bienestar.

Gráfico 6
Efectos de la estabilización bajo rendimientos
decrecientes de la inversión



Nota: bajo el planteamiento de Barlevy, al estabilizarse la economía, la tasa de inversión inicialmente no va a aumentar sustancialmente (gracias al supuesto sobre la función de inversión); por tanto, el consumo se alejará cada vez más del consumo tendencial correspondiente a la senda sin estabilización.

Así, Barlevy logró demostrar que los ciclos de negocios podrían resultar altamente costosos, aunque dejó claro que sus resultados no son, necesariamente, una defensa de la política macroeconómica de estabilización.

III. EL MODELO

El presente modelo, una versión simplificada de Barlevy (2004), cuenta con un agente representativo que sólo deriva utilidad del consumo (descontada en el tiempo, el cual es discreto) y que tiene acceso a la tecnología que convierte capital en consumo y en producción de nuevos bienes de capital. La fuente de fluctuaciones en esta economía son choques de productividad, es decir, aleatoriedad del factor de productividad (A_t); así mismo, el comportamiento de A_t debe ser tal que si existe un nivel x de productividad, se da que $\text{Prob}[A_{t+1} \leq x | A_t]$ es débilmente decreciente en A_t . Esto significa que una productividad alta alcanzada hoy viene acompañada de una productividad futura esperada mayor y más cercana al mencionado nivel e involucra mecanismos de persistencia en su comportamiento.

La senda del producto (y del consumo) en el tiempo depende de la evolución del acervo de capital. El agente tiene una cantidad inicial de capital K_0 y los valores iniciales para A_0 y Y_0 están dados. En cada período existe una depreciación δ del capital y cada vez el agente decide cuánto invertir y cuánto consumir. La senda de consumo en el tiempo y, por tanto, su tasa de crecimiento son endógenas⁸. Sean las siguientes funciones iniciales:

- Función de utilidad:
$$U(\{C_t\}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \quad (1)$$

- Tecnología de producción:
$$Y_t = A_t K_t \quad (2)$$

- Tecnología de producción de bienes de capital:
$$\Phi(I_t, K_t) = \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) K_t \quad (3)$$

Siendo:

β : factor de descuento de la utilidad.

$\gamma > 0$: Elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

Y_t : producto de la economía en el período t .

A_t : factor tecnológico en el período t . Sigue un proceso markoviano.

K_t : acervo de capital en el período t .

I_t : nivel de inversión bruta en el período t (inversión antes de la depreciación y del costo de transformar la producción no consumida en adición al acervo de capital).

ϕ : función cóncava de la inversión.

En la ecuación (2) el acervo de capital y el producto no guardan una relación lineal constante en el tiempo: es una función estocástica, pues téngase en cuenta que la variable A_t está expuesta a choques exógenos aleatorios de productividad; entonces, la

⁸ En este aspecto se diferencia de Lucas: la senda de consumo de esta última formulación contiene una tasa de crecimiento constante que es elegida exógenamente y sostiene un término de perturbación que se simula por medio de números aleatorios.

cantidad de producto que es elaborada con una unidad de capital varía en el tiempo, dadas las condiciones de productividad asociadas con cada momento.

La función de producción de bienes de capital, ecuación (3), tiene estas propiedades:

- Función homogénea de grado uno.
- $\frac{\partial \phi}{\partial I} > 0$ y $\frac{\partial^2 \phi}{\partial I^2} < 0$, es decir, la producción del capital adicional es una función creciente de la inversión, pero ésta última presenta rendimientos decrecientes: cada unidad adicional de inversión aporta menos en la producción del capital adicional, o, lo que es lo mismo, la función $\phi(\cdot)$ es cóncava en el plano ϕ, I .⁹ Esto significa que la cantidad de capital adicional disponible en un período de producción no será igual *per se* a la cantidad no consumida del producto en el período anterior, como sucede en los modelos macroeconómicos usuales.
- Los retornos decrecientes disminuyen la repuesta de la inversión a cambios en A_t .
- En cada período de producción no se gasta la totalidad del capital; sólo se deprecia una proporción δ ; por tanto, el acervo de capital disponible en un período dado sería igual a la cantidad no depreciada del capital en el período anterior, más la nueva producción de capital. De este modo, la senda para el acervo de capital sería la siguiente:

$$K_{t+1} = K_t - \delta K_t + \Phi(I_t, K_t), \text{ siendo } \Phi(I_t, K_t) = \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) K_t.$$

$$K_{t+1} = K_t - \delta K_t + \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) K_t$$

$$K_{t+1} = \left[1 + \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) - \delta\right] K_t \tag{4}$$

⁹ En la formulación de esta función está la clave para calcular costos de los ciclos económicos de mayor magnitud. Con los supuestos que recaen sobre ella es posible controlar la senda de consumo y hacer que, en condiciones estables, parta de la misma situación de la que lo haría en condiciones fluctuantes, evitando la reducción del consumo del período inicial del escenario estable (en favor de mayor inversión) y garantizando su mayor crecimiento posterior (y con ello de bienestar) en la senda completa.

Haciendo reemplazos sucesivos hasta K_0 resulta que:

$$K_t = \left[\prod_{s=0}^{t-1} \left(1 + \phi \left(\frac{I_s}{K_s} \right) - \delta \right) \right] K_0 \quad (5)$$

Igualmente, para hallar la senda de consumo debemos partir de la siguiente identidad:

$Y_t \equiv C_t + I_t$, es decir, la economía es cerrada y no existe gobierno (o el consumo de éste se encuentra contabilizado en C_t); además, definamos las siguientes proporciones: $C_t/Y_t = c_t$, e $I_t/Y_t = i_t$, por tanto, $c_t = 1 - i_t$. Nótese que c_t e i_t no son constantes; estas variables resultan del proceso de maximización del agente en cada período que Barlevy (2004, p. 969) define de la siguiente forma:

$$V(K_0, A_0) \equiv \max_{c_t} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma} \right]$$

- s.a. 1. $K_{t+1} = \left[1 + \phi \left(\frac{I_t}{K_t} \right) - \delta \right] K_t$
 2. K_0, A_0 y la ley de movimiento de A_t .

La solución de este problema se encuentra en el apéndice de Barlevy (2004). Una conclusión que se puede derivar de la solución es la siguiente: ante las fluctuaciones de A_t , el agente elegirá variar su tasa de ahorro (y, por ende, su tasa de inversión, i_t) conjuntamente, y en relación positiva, con A_t ; así mismo, dado que el complemento de la tasa de inversión es la tasa de consumo (c_t), ésta también será condicionada por las percepciones del agente con respecto a los cambios en el nivel de productividad de la economía, es decir, dado que existe aleatoriedad en el comportamiento de A_t , el agente variará su tasa de consumo de manera inversa a los cambios presentados en A_t , buscando siempre suavizar su senda de consumo.

Para hallar la senda de consumo procedamos de la siguiente forma:

$$C_t = c_t Y_t$$

$$C_t = c_t A_t K_t$$

$$C_t = c_t A_t \left[\prod_{s=0}^{t-1} \left(1 + \phi \left(\frac{I_s}{K_s} \right) - \delta \right) \right] K_0$$

$$C_t = \left[\prod_{s=0}^{t-1} \left(1 + \phi \left(i_s A_s \right) - \delta \right) \right] \frac{c_t A_t}{c_0 A_0} C_0$$

$$C_t = \left[\prod_{s=0}^{t-1} (1 + \phi(i_s A_s) - \delta) \right] \left(1 + \frac{c_t A_t}{c_0 A_0} - 1 \right) C_0$$

Sean $\lambda_s = (1 + \phi(i_s A_s) - \delta)$, y $\varepsilon_t = \frac{c_t A_t}{c_0 A_0} - 1$; se tiene que:

$$C_t = \left[\prod_{s=0}^{t-1} (\lambda_s) \right] (1 + \varepsilon_t) C_0 \tag{6}$$

Siendo:

λ_s : 1 + tasa de crecimiento del acervo de capital

ε_t : desviación del consumo con respecto a su senda

C_0 : nivel inicial de consumo

La ecuación (6) representa la senda del consumo. Nótese que si $\lambda_s = \lambda$ en todo período de tiempo, la ecuación (6) se convertiría en $C_t = \lambda^t (1 + \varepsilon_t) C_0$ (la propuesta de Lucas en su ensayo original es que λ y ε_t son exógenas; la diferencia radica en que ahora C_t es endógena como una respuesta óptima al ambiente económico incierto, más que a una especificación exógena).

A. ESTABILIDAD: UTILIDAD Y MAXIMIZACIÓN

Cuando A_t fluctúa en el tiempo el agente elegirá variar su tasa de acumulación (I/K) en el mismo sentido, pues, $I_s/K_s = i_s A_s$; así, la tasa de acumulación es función positiva de A_t . Esto implica que las tendencias del crecimiento para la inversión y el producto serán más altas cuando estas variables estén por encima de su tendencia previa (es decir, cuando han sucedido choques positivos de productividad). La esencia de estas afirmaciones se encuentra en la siguiente proposición.

Proposición 1

Si $\text{Prob}[A_{t+1} \leq x | A_t]$ es débilmente decreciente en A_t , entonces, $i_t A_t = I_t/K_t$ es incremental en A_t ¹⁰.

¹⁰ La prueba de esta proposición se encuentra en Barlevy (2004, p. 987).

1. La existencia de un ambiente estable

- Bajo un ambiente fluctuante la productividad puede estar expuesta tanto a choques positivos como negativos que se anulan entre sí; esto es, su senda a través del tiempo puede describirse como ondas que se desplazan alrededor de un valor específico con cierta persistencia. De ahí que se pueda afirmar que el valor que toma la productividad en un ambiente estable viene dado por $A^* = E(A_t)$, el valor medio de la senda fluctuante o su valor tendencial sin estabilización.
- Además, sea la siguiente definición para la razón inversión/producto en estabilidad: $i^* = E(i_t A_t)/A^*$, o, lo que es lo mismo, $i^* A^* = E(i_t A_t)$. Esta igualdad es recursiva por la siguiente razón: por definición, la esperanza de la multiplicación de dos variables aleatorias viene dada por $E(i_t A_t) = E(i_t)E(A_t) + \text{cov}(i_t, A_t)$, esto es, $i^* A^* = E(i_t) A^* + \text{cov}(i_t, A_t)$ y, despejando, $E(i_t) = i^* - [\text{cov}(i_t, A_t)/A^*]$. Esto quiere decir que siempre que la covarianza entre la razón inversión/producto y la productividad sea positiva, se tiene que la tasa de inversión bajo estabilidad (i^*) es superior al promedio de la tasa de inversión bajo el ambiente fluctuante. Esta covarianza debe ser positiva, pues el agente está dispuesto a otorgar una mayor cantidad de recursos para la inversión cada vez que la productividad alcance niveles más altos (según la proposición enunciada anteriormente), lo cual es importante pues muestra un camino por donde se puede explicar cómo la tasa de acumulación en un escenario estable es mayor que la tasa que se obtiene bajo un ambiente fluctuante.
- Así mismo, como $C_0 = c^* A^* K_0 = (1 - i^*) A^* K_0 = (A^* - i^* A^*) K_0 = [A^* - E(i_t A_t)]$, el consumo inicial es función negativa de la tasa de inversión elegida por el agente.

2. Implicaciones para el agente de pasar de un ambiente estocástico a uno estable

- Bajo un ambiente estable el agente elegirá una senda de consumo que no fluctúa alrededor de su tendencia. El individuo, siempre que $A_t = A^*$, destinará un c^* constante en el tiempo como proporción del producto para consumir; entonces, $\varepsilon_t = c_t A_t / c_0 A_0 - 1 = \varepsilon_t^* = c^* A^* / c^* A^* - 1 = 0$, es decir, el consumo no se desviará nunca de su senda. Lucas sólo se interesó por explicar este

primer tipo de efecto y llegó a resultados de magnitud despreciable; además, él introdujo las fluctuaciones por medio de perturbaciones idéntica e independientemente distribuidas (iid)¹¹, mientras que aquí existe correlación serial entre las perturbaciones inducidas por A_t y las respuestas de los agentes en sus decisiones de inversión.

- Como i_t es estable cuando la productividad (A_t) lo es, el agente elegirá una senda de consumo con tendencia determinística, no estocástica.

En conclusión, uniendo las dos implicaciones anteriores, la eliminación de las fluctuaciones en la productividad agregada descarta:

- 2.a Las fluctuaciones *alrededor* de la senda de consumo.
- 2.b Las fluctuaciones *en* la senda de consumo.

El resultado de la eliminación de la segunda fuente de fluctuaciones (no tenida en cuenta en el análisis de Lucas y de los estudios que siguieron esta vía) puede representar un mayor impacto sobre el bienestar del agente, pues este tipo de fluctuaciones genera un efecto permanente sobre la senda de consumo.

3. El agente puede mantener una pendiente diferente en el perfil de consumo con respecto a un ambiente estocástico; así, las causas para los cambios en el perfil del consumo son excluyentes:

- 3.a Cambios en la *volatilidad* de la inversión (aquí la tasa de inversión promedio (i) no varía).

¹¹ Según Reis (2005) el supuesto de choques sobre el consumo serialmente incorrelacionados es rechazado por los datos de los Estados Unidos, por tanto, la vía que toma Reis para evitar subvalorar el costo de las fluctuaciones es la construcción de las propiedades del proceso estocástico que sigue el consumo por medio de dos aproximaciones: una de origen estadístico y otra con una metodología económica. La primera alternativa muestra que el consumo es muy persistente y que, dado este comportamiento, las estimaciones de Lucas para el costo de las fluctuaciones son sesgadas hacia abajo. En la segunda vía, desde la cual las fluctuaciones del consumo son respuestas óptimas a choques, se considera la posibilidad de que las fluctuaciones influyen en el nivel y en la tasa de crecimiento del consumo por medio de su impacto sobre el ahorro precautelativo y la inversión. Los resultados de Reis reflejan que el costo de las fluctuaciones (sin diferenciar si provienen de choques de productividad o monetarios y si corresponden a los ciclos económicos o a la incertidumbre de largo plazo) se encuentra entre 0,5% y 5% del consumo per cápita.

3.b Cambios en el *nivel* de la inversión (aquí cambia i , esto es, se dan cambios en el promedio de inversión).

La tasa de crecimiento de la inversión (y del consumo) será mayor cuando se eliminan las fluctuaciones y se obliga al agente a mantener un nivel de inversión igual a $i^* = \frac{E(i_t A_t)}{A^*}$, es decir, cuando se escoge 3.a. en vez de 3.b.;

veamos por qué:

$$\lambda_i = 1 + \phi(i^* A^*) - \delta = 1 + \phi[E(i_t A_t)] - \delta > 1 + E[\phi(i_t A_t)] - \delta^{12}.$$

Entonces, la eliminación de la volatilidad traerá mayor crecimiento del consumo cuando la cantidad promedio de recursos dejada inicialmente para inversión permanece invariable (cuando no cambia el nivel). Cuando eliminamos las fluctuaciones y forzamos al agente a mantener la misma tasa de inversión promedio obtenemos una senda de consumo que parte del mismo nivel, pero que crece más rápidamente. Por el contrario, cuando se supone $\phi(\cdot)$ lineal (sin rendimientos decrecientes) se permite que el nivel de inversión aumente una vez se tiene el ambiente estable, reduciéndose así el nivel de consumo inicial. En este último caso los costos de bienestar son pequeños porque el mayor bienestar ganado por el más alto crecimiento de la inversión es contrarrestado por el menor consumo inicial del agente.

IV. ESTIMACIONES DEL COSTO DE LOS CICLOS ECONÓMICOS UTILIZANDO TASAS DE CRECIMIENTO

En esta sección se presentan los resultados de esta investigación con respecto al costo de las fluctuaciones en Colombia siguiendo la metodología de Barlevy (2004), la cual está basada en los efectos indirectos que presentan éstas sobre el consumo, pasando primero por su influencia en el crecimiento. Además, se utiliza un modelo que involucra retornos decrecientes de la inversión para modelar la distribución del crecimiento del consumo per cápita.

¹² La función $\phi(\cdot)$ es cóncava, por tanto, dado un intervalo para $i_t A_t$ —que comprende los valores que puede tomar la razón inversión/capital bajo un ambiente fluctuante—, se debe cumplir que la función evaluada en el valor medio del intervalo para $i_t A_t$ arroja un mayor valor que si se calcula el valor promedio que toma la función en este intervalo de $i_t A_t$.

A. UTILIZACIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN MARKOVIANA PARA EL CONSUMO Y RETORNOS DECRECIENTES DE LA INVERSIÓN

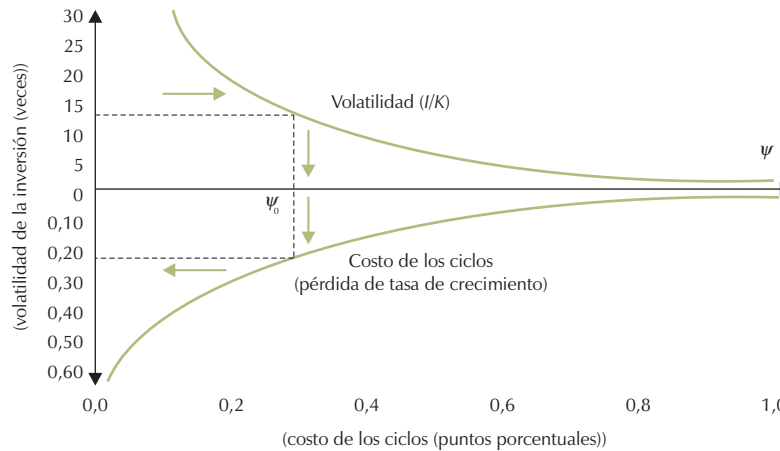
Antes de empezar el cálculo del costo de los ciclos económicos por medio de este método, se debe explicar en qué consistirá el procedimiento por emplear, el cual se dividirá en dos etapas: la primera pretende encontrar una relación entre la tasa de crecimiento esperada bajo estabilidad y el grado de retornos decrecientes para la inversión (ψ), por medio de un modelo markoviano. Para llegar a esta relación se parte de la senda de consumo especificada más arriba (en el modelo presentado) y se estiman sus componentes de crecimiento y volatilidad. El objetivo final de esta etapa será arrojar un intervalo para el costo de los ciclos, de acuerdo con un rango para ψ , coherente con el resultado obtenido mediante el modelo de panel anterior. Esta es la intención del presente literal (cuya interpretación gráfica se encuentra en la parte inferior del Gráfico 7).

La segunda etapa, que será desarrollada en la sección V, puntualiza el grado de retornos decrecientes por medio de la volatilidad de la inversión, la cual es interpretada como la relación entre máximo valor de la razón inversión/capital con respecto a su valor más bajo¹³. El proceso de determinación es el siguiente: primero, el nivel de variabilidad para la razón inversión/capital indicará el grado de retornos decrecientes aceptable para la economía colombiana (es decir, se tendrá un valor específico para ψ , según se muestra en las flechas de la parte superior del Gráfico 7). Luego, una vez obtenida una estimación puntual del parámetro ψ , se podrá regresar a la relación encontrada en la primera etapa (entre la tasa de crecimiento bajo estabilidad y el grado de retornos decrecientes) y calcular el costo (puntual) de los ciclos.

No obstante, no se tendrá un valor absoluto para el costo final, pues todo dependerá del método de estimación para la volatilidad de la inversión. Esta última puede ser calculada por medio de tres aproximaciones diferentes, sin garantizar que coincidan sus valores puntuales: la primera de ellas está basada en la observación de los datos reales de la relación I/K ; la segunda, está fundada en la capacidad de la q de Tobin para explicar la variabilidad de la inversión, y una tercera vía consiste en utilizar una descomposición de la razón inversión/capital en dos fuentes de variabilidad: tasa de inversión y productividad. Con cada una de estas aproximaciones se utilizará el orden de determinación explicado en el párrafo anterior y en el Gráfico 7.

13 Esta relación se entiende así: $\frac{\max(I/K)}{\min(I/K)}$ = número de veces.

Gráfico 7
 Orden de determinación del costo de los ciclos
 en el método 2 de estimación



Nota: las flechas indican el orden de determinación.

Ahora bien, para llevar a cabo la estimación de la primera etapa se debe especificar la forma funcional de la inversión, es decir, se debe encontrar una función cóncava que cumpla los requisitos fijados en el modelo; así, el grado de retornos decrecientes de la inversión, determinado por la función $\phi(I/K)$, se supone dado por una función de la razón inversión/capital:

$$\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) = \left(\frac{I_t}{K_t}\right)^\psi = (i_t A_t)^\psi \quad (7)$$

Donde ψ es un parámetro específico para Colombia que se encuentra en el intervalo (0,1]. Del valor de este parámetro va a depender el grado de rendimientos decrecientes para la inversión: mientras más cercano a cero sea este valor, mayor grado de retornos decrecientes se tendrá. El propósito de este literal es encontrar el costo de las fluctuaciones por medio de dos recursos: las series de datos para las tasas de crecimiento del consumo real per cápita y la especificación para la función decreciente de la inversión. El procedimiento consiste en encontrar la tasa esperada de crecimiento que se tendría si no existieran fluctuaciones.

Del modelo presentado en la sección III y reemplazando según (7), se tiene que la tasa de crecimiento de la ecuación (6) se puede escribir como

$\lambda_t = 1 + \phi(i_t A_t) - \delta = 1 + (i_t A_t)^\psi - \delta$, la cual es la especificación de la tasa de crecimiento involucrando los supuestos de retornos decrecientes para la inversión. De esta ecuación se puede despejar $i_t A_t = [\lambda_t - 1 + \delta]^{1/\psi}$, y del supuesto de estabilidad para la inversión y la productividad $i^* A^* = E(i_t A_t)$; por tanto, la senda de crecimiento esperada bajo estabilidad es:

$$E(\lambda_t) = 1 + \phi[E(i_t A_t)] - \delta = 1 + [E(i_t A_t)]^\psi - \delta$$

$$E(\lambda_t) = 1 + \left[E\left((\lambda_t - 1 + \delta)^{1/\psi} \right) \right]^\psi - \delta \tag{8}$$

De la ecuación (8) se concluye que el problema yace en la estimación de ψ . Para este objetivo se puede recurrir a la condición de primer orden en la solución del problema de maximización del consumidor¹⁴:

$$\phi'(i_t A_t) = \left[\frac{E(\beta V_k(K_{t+1}, A_{t+1}))}{U'(C_t)} \right]^{-1} = q^{-1} \tag{9}$$

Siendo $V_k(\cdot) = \frac{a(A_t)K_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$; en donde a es constante.

En la ecuación (9) el término entre corchetes es la q marginal de Tobin: la proporción entre el valor marginal de una unidad de capital y el valor de una unidad adicional de inversión. En este análisis, como las funciones de producción son homogéneas de grado 1, la q marginal es igual a la q promedio¹⁵. De (9) se puede obtener la siguiente regresión¹⁶:

$$\ln\left(\frac{I_t}{K_t}\right) = \text{constante} + \frac{1}{1-\psi} \ln q, \tag{10}$$

donde $\frac{1}{1-\psi}$ es la elasticidad de la inversión con respecto a la q de Tobin; además, como el parámetro de interés ψ está entre cero y uno, se tiene que $\frac{1}{1-\psi} > 1$.

¹⁴ Resuelto en el apéndice de Barlevy (2004, p. 987).

¹⁵ Esta conclusión se encuentra en el trabajo de Hayashi (1982) para el caso determinístico y en el trabajo de Abel y Eberly (1994) para el caso estocástico, citados en Birchenall (1997, p. 17).

¹⁶ Como $\phi(I_t/K_t) = (I_t/K_t)^\psi$, $\phi'(I_t/K_t) = \psi(I_t/K_t)^{\psi-1}$, es la derivada con respecto a I/K , por tanto, $\psi(I_t/K_t)^{\psi-1} = q^{-1}$ o, en logaritmos, se tiene que $\ln \psi + (\psi - 1) \ln(I_t/K_t) = -\ln q$. Luego, $\ln(I_t/K_t) = -\ln \psi + 1/(\psi - 1) \ln q$. Más adelante también se utilizará la siguiente razón: $(I_t/K_t)/(I_s/K_s) = (i_t A_t)/(i_s A_s) = (q_t/q_s)^{1/\psi}$.

Sin embargo, a falta de datos consolidados para la q de Tobin, no es posible calcular ψ por esta vía y se debe encontrar un rango aproximado para hacer los análisis posteriores. Para efectos de este ensayo se ha establecido un rango entre 0,15 y 0,30 del parámetro ψ , que implica una elasticidad de la inversión respecto con a la q de Tobin entre 1,18 y 1,43¹⁷.

Retomando el hilo principal, son dos los recursos de los que se valdrá esta etapa para medir el costo de los ciclos. La primera parte ya quedó finalizada con la elección de los valores que tomará el parámetro ψ y el cual define el grado de retornos decrecientes de la inversión; ahora, veamos cómo será la notación para la distribución del consu-

mo: la ecuación (6), $C_t = \left[\prod_{s=0}^{t-1} (\lambda_s) \right] (1 + \varepsilon_t) C_0$, puede describirse en logaritmos de la

siguiente forma: $\ln C_t = \sum_{s=0}^{t-1} \ln \lambda_s + \ln(1 + \varepsilon_t) + \ln C_0$. En primeras diferencias (como aproximación a la tasa de crecimiento del consumo per cápita) este modelo sería expresado así:

$$\Delta \ln C_t = \left(\sum_{s=0}^{t-1} \ln \lambda_s + \ln(1 + \varepsilon_t) + \ln C_0 \right) - \left(\sum_{s=0}^{t-2} \ln \lambda_s + \ln(1 + \varepsilon_{t-1}) + \ln C_0 \right),$$

resultando por último la siguiente expresión $\Delta \ln C_t = \ln \lambda_{t-1} + \Delta \ln(1 + \varepsilon_t)$.

Recordemos, sin embargo, que λ_t depende del nivel de productividad (A_t), y que ésta sigue un proceso de Markov en N estados; por tanto, el consumo tampoco será determinístico y su tasa de crecimiento seguirá un proceso estocástico. La distribución de λ_t (sus valores para cada estado, la matriz de transición, matriz $N \times N$, y sus respectivas probabilidades ergódicas) será hallada a través de una regresión *switching* estimada por máxima verosimilitud; así, la función estocástica para el consumo es:

$$\Delta \ln C_t = \ln \lambda_{t-1} + \Delta \ln(1 + \varepsilon_t) + \eta_t \tag{11}$$

donde $\eta_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Los términos por estimar serán N tasas de crecimiento, una matriz de transición $N \times N$ (y con ésta las probabilidades ergódicas), $(N - 1)$ primeras diferencias del choque

¹⁷ La razón principal para que otorguemos alguna validez a estos valores, como se mostrará más adelante, es que arrojan un intervalo para el costo de los ciclos que contiene el valor encontrado en la estimación del método 1 (0,43 pp).

$\varepsilon_t (\Delta \ln(1 + \varepsilon_t))$ ¹⁸ y la varianza del término de perturbación (η_t). Con estas estimaciones y con los valores para ψ se puede hallar la tasa de crecimiento esperada que corresponde al escenario de estabilidad descrita en la ecuación (8). Para el caso de este artículo se desarrolló un modelo con dos regímenes (auge y recesión) para el crecimiento del consumo per cápita¹⁹.

Los datos del consumo real entre 1950 y 2000 son calculados por Greco (2002); para 2001 y 2002 se utilizaron los datos publicados en la página electrónica del Banco de la República sobre el consumo de los hogares con precios de 1994 y se convirtieron a pesos de 1975. La población total corresponde a los datos oficiales del DANE dados por Greco (2002); para encontrar la población en el período restante 1998-2002 se extendió la tasa de crecimiento que se tenía para el período 1986-1997 (2,01% anual); además, se fijó una tasa de crecimiento de 1,4% anual para el consumo per cápita, como aproximación a su tasa de largo plazo²⁰. La estimación de la regresión *switching* se lleva a cabo a través de la función de verosimilitud construida por Barlevy (2004), y el proceso de estimación es similar al descrito para el caso de series de tiempo por Hamilton (1994). Es de anotar que, dentro de la función de verosimilitud, la tasa de crecimiento anual de largo plazo para el consumo per cápita (0,014) es usada para hallar las desviaciones con respecto a la media ($0,014 \pm \lambda_t$).

El Cuadro 2 muestra los resultados encontrados: las desviaciones estándar mostradas en la última columna, que corresponden únicamente a los parámetros estimados en el programa diseñado —dos probabilidades de transición: p_{01} y p_{10} (p_{00} y p_{11} son halladas por complemento), la tasa de crecimiento en recesión (la otra tasa es calculada por medio de ésta y con las probabilidades), el término de perturbación y sigma—, confirman que todos los resultados son significativos al 95%. Existen dos

18 Si estas primeras diferencias son positivas, significa que el consumo crece más rápidamente cuando está por encima de su tendencia; cuando son negativas, significa que crece con mayor rapidez cuando está por debajo de su nivel natural, y crece más lentamente (o decrece) cuando el nivel de productividad es alto y se encuentra por encima de su tendencia.

19 También se probó con un modelo de tres regímenes, con recesión, crecimiento sostenido y auge, pero los resultados no fueron satisfactorios para el contexto colombiano. También en Misas y Ramírez (2005, p. 6) se afirma que el modelo con tres regímenes no es apropiado para la economía colombiana, pues los datos no apoyan este tipo de modelaciones.

20 Para el período 1950-2002 la media del crecimiento anual del consumo per cápita es de 1,25% y la mediana de 1,4%. Si se excluye el año 1999 la media también es 1,4%; por tanto, se fijó este valor como tasa tendencial del crecimiento. Sobre ésta será evaluada la tasa de crecimiento esperada bajo estabilidad, es decir, será el valor base para los cálculos de los efectos del crecimiento.

Cuadro 2
Estimación de máxima verosimilitud para un modelo de Markov
del crecimiento del consumo per cápita (dos regímenes)

Matriz de transición		
	Coeficientes	Desviaciones estándar
$p_{00} =$	0,7111	----
$p_{01} =$	0,2889	0,1379
$p_{10} =$	0,1638	0,0758
$p_{11} =$	0,8362	----
Tasas de crecimiento		
	Coeficientes	Desviaciones estándar
$0,014 - \ln \lambda_0 =$	-0,0013	0,0057 ^{a/}
$0,014 - \ln \lambda_1 =$	0,0227 ^{b/}	
Primera diferencia de los choques		
	Coeficientes	Desviaciones estándar
$\Delta \ln(1 + \varepsilon_{01}) =$	-0,0498	0,0062
Varianza del término de perturbación		
	Coeficientes	Desviaciones estándar
σ^2	0,0005	0,0001
Probabilidades ergódicas P_0 y P_1		
Estado	Prob.	
0	0,362	
1	0,638	
Duración de los estados I_0 y I_1		
Estado	Longitud (años)	
0	3,5	
1	6,1	
Logaritmo de la verosimilitud		
$F = -100,8811$		

a/ Corresponde a la desviación estándar del parámetro $\ln \lambda_0$.

b/ En donde $\ln \lambda_1 = (p_1 / p_0) \ln \lambda_0$.

Fuentes: consumo real: 1950-2000, datos de Greco (2002); para 2001 y 2002 se utilizaron los datos publicados en la página electrónica del Banco de la República del consumo de los hogares con precios de 1994 y se convirtieron a pesos de 1975. Población total: 1950-1997, datos oficiales de DANE dados por Greco (2002); para 1998-2002 se extendió la tasa de crecimiento del período 1986-1997 (2,01% anual).

estados, el estado cero representa un escenario de recesión económica y el estado uno denota una situación de auge. Los primeros resultados mostrados corresponden a la matriz de transición, donde cada p_{ij} denota la probabilidad de que un estado i sea seguido por el estado j ; por ejemplo: se nota que los dos estados tienden a ser muy persistentes, pues en la diagonal (p_{00}, p_{11}) los valores son muy cercanos a 1, es decir, la probabilidad de que un período de recesión (expansión) sea seguido por otro lapso de desaceleración (aceleración) es muy alta.

Además, el Cuadro 3 presenta la variación en la tendencia del consumo en cada estado, la cual varía entre -0,13%, para el caso de un período de recesión, y 2,27%, en estado de auge ($\ln \lambda_t$ corresponde a $\ln[1 + \phi(i, A_t) - \delta]$ en el modelo). Seguidamente se presenta el estimador para la primera diferencia de los choques ($\Delta \ln(1 + \varepsilon_{0t})$); su valor negativo implica que cuando la productividad es alta, el consumo (en nivel) disminuye, debido a la relación positiva entre productividad e inversión. Por último, se presenta la varianza del término de perturbación η_t .

A continuación se muestran los cálculos que se pueden llevar a cabo con estas estimaciones: en primer lugar, está el vector de probabilidades ergódicas (el cual es propio de la matriz de transición asociada con el valor propio unitario), que representa la distribución de las tasas de crecimiento λ_0 y λ_1 ; además, se halla la longitud del ciclo dada por esta estimación. La longitud del estado i es igual a $l_i = 1/(1 - p_{ii})$. El ciclo del consumo sería cercano a nueve años y medio: 6,1 años de expansión y 3,5 años de recesión. Este resultado se encuentra próximo a los ocho años recomendados (para el PIB) en diversos estudios hechos hasta el momento en Colombia: cuatro años de expansión y cuatro años de recesión (véase Posada, 1999, p. 7; Avella y Ferguson, 2003, p. 58; Gómez y Posada, 2004; p. 3). Finalmente, con los valores estimados en el modelo anterior y estableciendo $\delta = 0,04$ como la tasa de depreciación característica a Colombia, según estimaciones de Greco (2002, p. 97), se tiene que la ecuación (8), la cual calcula la tasa esperada de crecimiento bajo el escenario de estabilidad, es²¹:

$$E(\lambda_t) = 1 + \left[0,362x(0,0387)^{\frac{1}{\psi}} + 0,638x(0,063)^{\frac{1}{\psi}} \right] - 0,04 \quad (12)$$

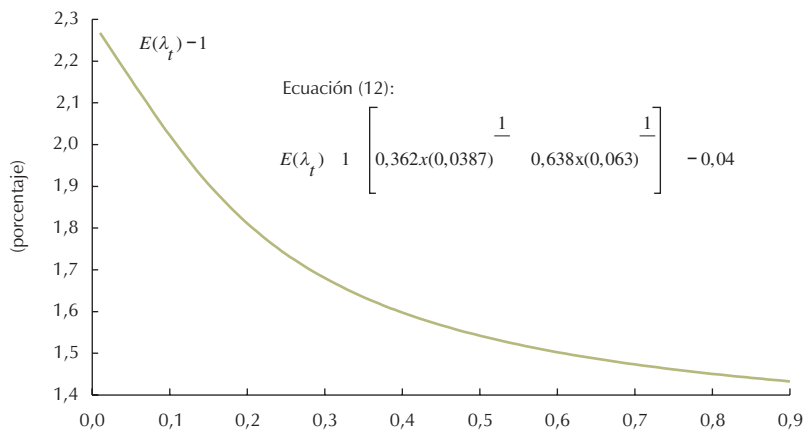
21 La ecuación (12) está construida por medio de las probabilidades ergódicas reportadas en el Cuadro 3 (0,362 y 0,638), las cuales implican que el número encontrado sea un valor esperado. A su vez, las tasas de crecimiento (0,0387 y 0,063), corresponden a la expresión $\lambda_t - 1 + \delta$ (que señala retornos decrecientes para la inversión) donde λ_t es el valor exponencial de las tasas de crecimiento reportadas en dicha tabla. Por ejemplo, $0,0387 = \exp(-0,0013) - 1 + 0,04$.

El Gráfico 8 muestra la relación entre los valores de ψ y la tasa de crecimiento esperada, formalizada por la ecuación (12). La conclusión ya se había anunciado: a mayor grado de retornos decrecientes en la inversión (menor ψ), mayor es el aumento presentado en la tasa de crecimiento, con respecto a la tasa 1,4%, fijada como valor base de la tasa de crecimiento del consumo per cápita de largo plazo. En este estudio se consideró un intervalo entre 0,15 y 0,30 del parámetro ψ ; con estos valores se tiene una tasa de crecimiento esperada entre 1,68% y 1,90%, lo cual equivale a una diferencia positiva en la tasa de crecimiento del consumo per cápita entre 0,28% y 0,50%, intervalo que contiene la cifra 0,43%, estimada mediante la modelación de panel del literal anterior. Por tanto, la evidencia con las tasas de crecimiento parece mostrar que el impacto de las fluctuaciones está entre 0,3 y 0,5 pp de la tasa de crecimiento del consumo per cápita, y entre un 6% y un 10% del consumo total de las familias.

V. REVISIÓN DEL COSTO DE LOS CICLOS TENIENDO EN CUENTA LA VOLATILIDAD DE LA INVERSIÓN

En el literal anterior se encontró un intervalo de datos para el posible costo de los ciclos económicos; sin embargo, todavía falta ver si estos valores encontrados, que

Gráfico 8
 Relación entre el parámetro que determina el grado de retornos decrecientes de la inversión y la tasa de crecimiento esperada bajo estabilidad



Fuente: cálculos de los autores.

exigen una determinada volatilidad en las tasa de crecimiento del consumo, son coherentes con la volatilidad observada de la inversión²². Ya se había anunciado que esta etapa consiste en encontrar el valor de ψ puntual que corresponda a los niveles de volatilidad medidos en este apartado. Siguiendo con la modelación que se hacía de dos regímenes, se debe encontrar la volatilidad necesaria en la inversión de acuerdo con el grado de retornos decrecientes. En este escenario se tienen dos tasas de crecimiento: una en recesión (λ_0) y otra, la más alta, en expansión (λ_1). También, se tienen dos niveles de productividad, así: sea i_0A_0 el valor de I/K cuando la productividad toma su valor más bajo (correspondiente a λ_0) e i_1A_1 el valor de I/K en el escenario inverso; por consiguiente, analíticamente las relaciones antes dichas se pueden expresar como sigue:

<p>Recesión</p> $\lambda_0 = 1 + \phi(i_0A_0) - \delta$ $\Rightarrow \phi(i_0A_0) = \lambda_0 - 1 + \delta$ $\Rightarrow i_0A_0 = (\lambda_0 - 1 + \delta)^{1/\psi}$	<p>Expansión</p> $\lambda_1 = 1 + \phi(i_1A_1) - \delta$ $\Rightarrow \phi(i_1A_1) = \lambda_1 - 1 + \delta$ $\Rightarrow i_1A_1 = (\lambda_1 - 1 + \delta)^{1/\psi}$
--	---

De este modo, la razón entre el valor más alto de la inversión y su valor más bajo es

$$\frac{(I/K)_1}{(I/K)_0} = \frac{i_1A_1}{i_0A_0} = \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi}, \quad \lambda_1 > \lambda_0 \tag{13}$$

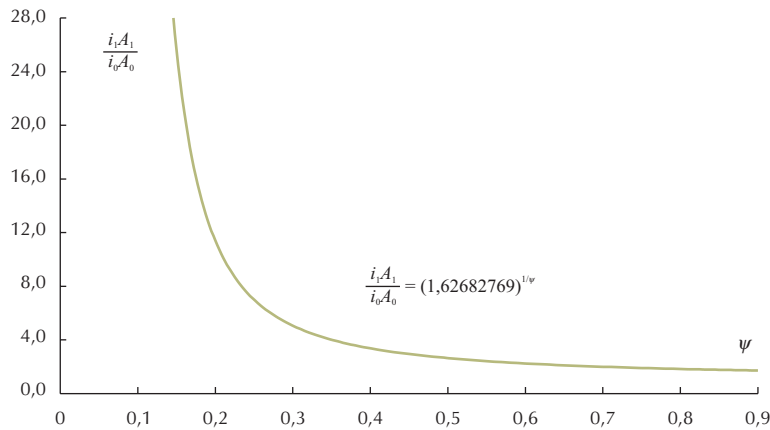
Reemplazando en la ecuación (13) los valores presentados en el Cuadro 3 para λ_1 y λ_0 , se puede encontrar la volatilidad que es necesaria en la inversión para que sea coherente con las fluctuaciones que estas tasas de crecimiento involucran. La función que resulta con estos valores es:

$$\frac{i_1A_1}{i_0A_0} = (1,62682769)^{1/\psi} \tag{14}$$

El Gráfico 9 señala la volatilidad que es necesaria en la inversión de acuerdo con el grado de retornos decrecientes y condicionada a las tasas de crecimiento encontradas en el modelo markoviano de dos regímenes: por ejemplo, si ψ es 0,15, la razón entre el máximo y el mínimo valor de la *ratio* inversión/capital debería ser de 25,64

²² Esta duda tiene sentido pues siempre la volatilidad de la inversión es mayor que la volatilidad del producto y del consumo.

Gráfico 9
 Grado de rendimientos decrecientes correspondiente
 a cada nivel de volatilidad de la inversión



Fuente: cálculos de los autores.

veces, pero si ψ es 0,30, este valor se reduciría a 5,06. Como se nota, cuanto mayor sea el grado de retornos decrecientes de la inversión, más grande será la volatilidad de ésta para estar acorde con las fluctuaciones en la tasa de crecimiento²³. Con todo, existe un *trade off* entre encontrar altos costos de los ciclos (pequeños valores del parámetro ψ) y hacer empíricamente probable la volatilidad de la inversión necesaria para ese costo (valores altos para ψ); en este orden, se deben establecer los valores de ψ que concilien las dos condiciones anteriores: que generen costos en los ciclos sin exigir volatilidades improbables en la inversión.

Un primer camino para evaluar la volatilidad empírica de la razón inversión/capital consiste en escoger el mayor y el menor número observados de esta relación en el período 1950-2000²⁴. El mayor número reportado en este período es 0,10 y el menor es 0,04; entonces, la relación especificada en el lado izquierdo de la ecuación (13) reporta una diferencia entre la cima y el valle de 2,5 veces. Con este valor, ψ debería

23 En la ecuación (13) se puede probar fácilmente que $\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \infty$.

24 Los datos son tomados de Greco (2002).

ser igual a 0,53²⁵ y el costo de los ciclos, calculado en la ecuación (12), se reduciría a 0,13 pp, con un efecto sobre el nivel del consumo total de 2,6%²⁶.

Como una segunda vía de aproximación a la volatilidad de la inversión se consideró el siguiente sistema de dos ecuaciones, cuya solución nos aporta otro valor probable de ψ para Colombia.

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi} = (1,62682769)^{1/\psi} \quad (15.A)^{27}$$

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left(\frac{q_1}{q_0} \right)^{1/1-\psi} = 2^{1/1-\psi} \quad (15.B)^{28}$$

La ecuación 15.B se basa en el postulado según el cual la respuesta de la inversión ante cambios en el valor de la q de Tobin también depende del grado de retornos decrecientes. Es decir, el valor de ψ debe ser aquel que reconcilie los datos de la q de Tobin con los datos de volatilidad de inversión. Se supuso que $q_1 = 1,4$ fue el valor más alto de la q de Tobin en el período 1950-2002, y $q_0 = 0,7$ el valor mínimo²⁹. El Gráfico 10 ilustra la solución a este sistema (en el Anexo 1, sección A, se encuentra la solución analítica). Los resultados ya no son tan despreciables sobre el crecimiento, pero se encuentran fuera del rango que se utilizó para ψ (entre 0,15 y 0,30). El valor solución para ψ es igual a 0,41, y el costo es de 0,19 pp (ecuación 12), es decir, la tasa de crecimiento del consumo per cápita se incrementaría de 1,4% a 1,69% y el costo sobre el nivel de consumo total es de 3,8%.

25 Despejando en la ecuación (14). $\psi = \frac{\ln((\lambda_1 - 1 + \delta)/(\lambda_0 - 1 + \delta))}{\ln(i_1 A_1 / i_0 A_0)} = \frac{\ln 1,63}{\ln 2,5} = 0,53$

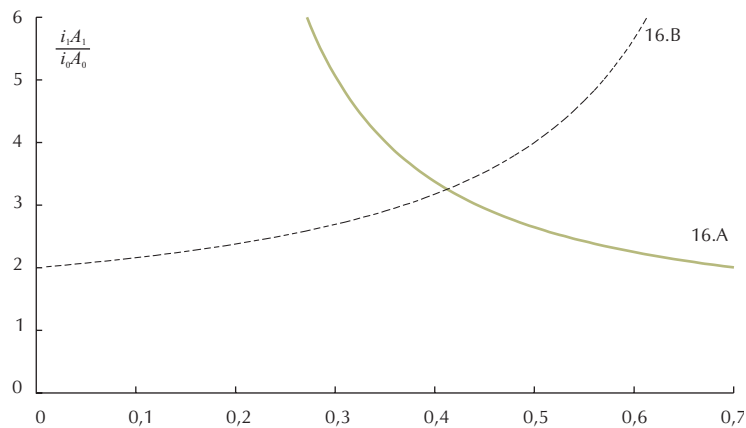
26 Recuérdese el orden de determinación establecido en el Gráfico 7: esta aproximación, la más sencilla de todas, tiene dificultades para generar altos niveles de volatilidad de la inversión, por este motivo reporta un costo de los ciclos muy alejado, hacia abajo, al entregado por el método 1.

27 Ecuación (14).

28 Véase pie de página 16.

29 Estos valores de la q de Tobin corresponden a los extremos de los promedios simples calculados por Gutiérrez y Pombo (2005) para el período 1998-2002, correspondiendo el máximo valor al inicio del período y el mínimo al año 2002. Se optó por utilizar los promedios simples, en vez de unos promedios ponderados por el total de activos de cada empresa, porque los primeros, al contrario de la segunda alternativa, contuvieron el valor unitario en el valor medio del intervalo señalado y dan la posibilidad de explicar mayor volatilidad en la ecuación (15.B). El máximo y el mínimo valor de los promedios ponderados correspondieron a 1,07 y 0,73, respectivamente.

Gráfico 10
 Solución gráfica al sistema de ecuaciones correspondientes
 a una medida de la volatilidad de la inversión por medio de la q de Tobin



Nota: el gráfico muestra el valor que corresponde a la segunda vía de estimación de la volatilidad de la inversión, el que no debe entenderse como modelación de las otras dos aproximaciones; es exclusiva a la utilización de la q de Tobin.
 Fuente: cálculos de los autores.

El Gráfico 10 muestra el valor de ψ que corresponde a la segunda vía de estimación de la volatilidad de la inversión: este gráfico no debe entenderse como modelación de las otras dos aproximaciones; es exclusivo de la utilización de la q de Tobin.

Una tercera vía para calcular la volatilidad de la razón inversión-capital consiste en descomponer la tasa de variación de la inversión, $i_1 A_1 / i_0 A_0$, de la siguiente forma:

- i_1 / i_0 (volatilidad de la relación I/Y), y
- A_1 / A_0 (que es la volatilidad de la razón Y/K , o de la productividad agregada del capital).

Con respecto a la primera parte de esta descomposición, en el período comprendido entre 1950 y 2002 la máxima tasa de inversión fue 30% y la mínima 14%; por ende, la razón i_1 / i_0 sería igual a 2,14. En cuanto a la productividad agregada existe el problema de que tradicionalmente es medida utilizando modelos que involucran capital y trabajo, y el modelo utilizado aquí sólo involucra el primero de estos factores. Por eso, la solución que propone Barlevy (2004) es transformar la función de producción utilizando

la notación de Paul Romer para economías externas de escala: $Y_{it} = Z_t (K_t L_{it})^\alpha K_t^{1-\alpha}$; siendo Z_t el nivel de productividad común a todas las firmas, $K_t = \sum_i K_{it}$ el capital total, igual a la suma del capital de cada firma i , $L_t = \sum_i L_{it}$ el trabajo total, igual a la suma del trabajo de cada firma i , y α la participación del trabajo en el producto. El producto total, Y , también es la suma de las producciones individuales.

Esta función permite que la tecnología de cada firma exhiba retornos constantes a escala en sus propios factores; por consiguiente, permite que el problema de la firma bajo condiciones de competencia esté bien definido, pero existen rendimientos crecientes de escala en el nivel agregado por la externalidad que genera el capital total de la economía. Veamos el producto agregado:

$$Y_t = \sum_i Y_{it} = Z_t \sum_i [(K_t L_{it})^\alpha K_t^{1-\alpha}]$$

$$Y_t = Z_t (K_t L_t)^\alpha K_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = (Z_t L_t^\alpha) K_t, \text{ sea } A_t = (Z_t L_t^\alpha)$$

Por ende, $Y_t = A_t K_t$; en el nivel agregado, la función de producción es la misma que la utilizada en este artículo.

Para ver a qué es igual la razón $A_1/A_0 = Z_1 L_1^\alpha / Z_0 L_0^\alpha$, definamos las variables (de acuerdo con las relaciones establecidas bajo un modelo markoviano de dos regímenes): sea $Z_0 = (1 - \pi_x) \bar{Z}$, el valor de la productividad común bajo el escenario recesivo, y $Z_1 = (1 + x) \bar{Z}$, su valor más alto. Similarmente para L , $L_0 = (1 - \pi_x) \bar{L}$ y $L_1 = (1 + x) \bar{L}$. Siendo $\pi = p_1/p_0$ la razón de las probabilidades ergódicas halladas en la estimación anterior, x la desviación de la variable correspondiente con respecto a su tendencia (hacia estados recesivos o expansivos), p_0 la probabilidad de que se den Z y L en un estado recesivo y p_1 la probabilidad inversa. La ventaja de esta notación está en que los promedios de Z y de L serán \bar{Z} y \bar{L} , respectivamente³⁰. Además, las varianzas, desviaciones estándar y desviaciones estándar relativas con respecto a la media para Z y L son:

³⁰ En el Anexo 1 está la prueba de esta afirmación y además se encuentran las varianzas de estas igualdades.

$$\begin{aligned} \text{var}(Z_t) &= \frac{p_1}{p_o} \left(x \bar{Z} \right)^2 & \text{var}(N_t) &= \frac{p_1}{p_o} \left(x \bar{N} \right)^2 \\ S.E.(Z_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x \bar{Z} & S.E.(N_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x \bar{N} \\ sd(Z_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x & sd(N_t) &= \sqrt{\frac{p_1}{p_o}} x \end{aligned}$$

Como $sd = \sqrt{p_1/p_o} x$ se tiene que $x = \sqrt{p_o/p_1} sd$ y $p_1/p_o x = \sqrt{p_1/p_o} sd$, así,

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{N_1}{N_0} = \frac{1+x}{1-p_1/p_o x} = \frac{1+\sqrt{p_o/p_1} sd}{1-\sqrt{p_1/p_o} sd}, \text{ entonces}$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_1}{Z_0} \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^\alpha = \left[\frac{1+\sqrt{p_o/p_1} sd}{1-\sqrt{p_1/p_o} sd} \right]^{1+\alpha}, \text{ es la variabilidad de la productividad.}$$

Las probabilidades ergódicas ya las conocemos; sólo falta encontrar un valor apropiado para sd y para α . Para medir la desviación estándar relativa se consideró la serie de la población económicamente activa (PEA) entre 1950 y 2002³¹. A esta serie se le encontró la desviación estándar y la media; la razón entre estas dos se consideró el estimativo para sd . El resultado fue 49% (véase Cuadro 1), un poco más de ocho veces superior al estimado para los Estados Unidos (6%). Igualmente, el parámetro α fue fijado en 0,6 (Greco, 2002, p. 97); así, la fluctuación de la productividad, calculada de esta forma, sería igual a:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{Z_1}{Z_0} \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^\alpha = \left[\frac{1+\sqrt{0,62/0,638} sd}{1-\sqrt{0,638/0,362} sd} \right]^{1,6} = \left(\frac{1,369}{0,349} \right)^{1,6} = (3,92)^{1,6} = 8,9$$

De lo anterior, la razón total entre el valor más alto de la *ratio* inversión/capital con respecto a su valor más bajo es $i_1 A_1 / i_0 A_0 = (i_1 / i_0) (A_0 / A_1) = 2,14 \times 8,9 = 19,06$. Esta volatilidad de la inversión se encuentra considerada en el intervalo de ψ escogido para evaluar los resultados del Cuadro 3, pues, cuando $\psi = 0,30$, $i_1 A_1 / i_0 A_0$ es 5,064 y para $\psi = 0,15$, es 25,64 (ecuación 14). Específicamente, 19,06 es el valor que corresponde a

³¹ Los datos de la PEA hasta 2000 son del Greco (2002). Para 2001 y 2002 la PEA se calculó por medio de la tasa bruta de participación dada por la OIT (página de la Cepal-Celade), en donde la $PEA = \text{población total} \times \text{tasa bruta de participación}$. Para la fuente de población total en 2001 y 2002, véase Cuadro 3.

$\psi = 0,165^{32}$, con lo cual el costo de los ciclos equivale a 0,474 pp en el crecimiento del consumo anual per cápita (ecuación 12), es decir, se pasaría de tener una tasa anual de 1,4% de largo plazo en el consumo per cápita a una equivalente a 1,874%, y el efecto sobre el nivel de consumo global de las familias equivaldría a un incremento de 9,5%. Un aspecto positivo de esta aproximación es que da como resultado un costo similar al encontrado en el modelo de panel con datos de crecimiento; éste correspondía a 0,43 pp³³.

VI. MEDICIÓN DE LA PÉRDIDA DE BIENESTAR DEL AGENTE POR LOS CICLOS ECONÓMICOS

Hasta ahora se han presentado los resultados correspondientes al efecto de los ciclos económicos en términos de un impacto sobre la tasa de crecimiento del consumo anual per cápita. Los cálculos de esta sección permitirán medir la pérdida de bienestar del consumidor cuando se está en un escenario fluctuante, con respecto al ambiente estable, involucrando la función de utilidad referida en este estudio (ecuación 1) y por medio de dos sendas de consumo: una, creciendo a un ritmo más alto (a causa de la estabilidad) y, la otra, creciendo más lentamente (a causa de las fluctuaciones). Esto es, se medirá la variación del bienestar del agente bajo dos sendas, una

$$^{32} \psi = \frac{\ln((\lambda_1 - 1 + \delta)/(\lambda_0 - 1 + \delta))}{\ln(i_1 A_1 / i_0 A_0)} = \frac{\ln 1,63}{\ln 19,06} = 0,165$$

³³ La metodología presentada hasta ahora para estimar el costo de los ciclos está construida de acuerdo con la propuesta de Barlevy (2004); no obstante, la utilización de datos per cápita en un modelo que involucra acumulación de capital y que no tiene en cuenta la tasa de crecimiento de la población puede llegar a resultados demasiado imprecisos. Por este motivo todo el procedimiento desarrollado en los apartados IV y V se repitió usando tasas de crecimiento del PIB y del consumo agregados (los resultados presentados en el texto corresponden a PIB y consumo, ambos, per cápita). Para ventaja de las estimaciones presentadas hasta el momento, los datos utilizados parecen mostrar una tendencia similar.

El método 1 arrojó un efecto de la volatilidad agregada sobre el crecimiento de 0,48 pp, cercano al obtenido con los datos per cápita del PIB (0,43 pp). A su vez, el método 2 también resultó en costos un poco más altos. En su primera alternativa, cuando la volatilidad de la razón inversión/capital es medida directamente de sus datos, el costo resultó de 0,24 pp; luego, por medio de la utilización de la q de Tobin, el costo ascendió a 0,37 pp (pues la volatilidad medida por esta vía es mayor). Finalmente, cuando se utiliza la descomposición de la razón I/K para medir su volatilidad, el costo es de 0,81 pp.

De esta manera, el rango para el costo de los ciclos evidenciado por la utilización de datos agregados va desde 0,24 a 0,81 pp (aumentándose la tasa promedio de crecimiento del producto agregado de la segunda mitad del siglo XX de 4% a 4,24%, en el lado inferior, o a 4,81%, utilizando el valor máximo del intervalo), mientras con los datos per cápita se tenía un intervalo de costos entre 0,13 y 0,47 pp. Así mismo, el costo sobre el nivel global de consumo, que antes estaba entre 2,6% y 9,5%, ahora está entre 4,8% y 16,2%.

creciendo más rápidamente que otra; por tanto, la única característica que explica la diferencia en el bienestar de las familias será la pendiente diferencial en sus sendas de consumo, sin que ninguna de las dos esté expuesta a fluctuaciones³⁴.

Se tendrán dos formas de medición de este costo de bienestar: la primera consiste en encontrar la razón entre la utilidad lograda por el agente sobre estas dos sendas diferentes de consumo: una que aumenta según la tasa de crecimiento anual del consumo per cápita estimada para el escenario de estabilidad y otra que crece a la tasa media observada; el segundo mecanismo pretende encontrar una tasa de compensación (como porcentaje del consumo inicial) que se le asigne al agente en un momento cero, bajo un escenario de fluctuaciones, para hacer que éste sea indiferente entre las dos sendas anteriores de consumo.

En las dos aproximaciones, dada la función de utilidad de la forma *CRRA*, los resultados van a depender de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo (γ). Cuando esta es igual a uno se tiene una función de utilidad logarítmica. A su vez, para diferentes niveles de sustituibilidad, la función retoma su forma original y debe ir reportando magnitudes de pérdida de bienestar que se relacionan positivamente con este parámetro, pues para valores superiores de éste la utilidad marginal del consumo es más alta y la utilidad total crece más rápidamente cuando se presentan incrementos en el consumo³⁵.

Sean C_t el consumo agregado y $C_0 = 7,645$ el consumo inicial o valor en pesos de 1975 del consumo per cápita en 1950 (año inicial o año cero). Sin estabilizar, la tasa media de crecimiento anual del consumo per cápita es igual a 1,4%; por ende, la función de utilidad es:

34 La fluctuación del consumo se tuvo en cuenta para calcular el costo en términos de tasa de crecimiento. Por lo tanto, en este apartado podemos ignorar la diferencia original entre sendas de consumo fluctuante y estable, y concentrarnos en dos sendas invariables, que se diferencian únicamente por su pendiente (su tasa de crecimiento). En este punto pierde su relevancia la aversión al riesgo porque la comparación se hace entre sendas sin fluctuaciones en su recorrido.

35 Para una función de utilidad $U(\{C_t\}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-1/\gamma} - 1}{1-1/\gamma}$ se tiene que $\frac{d(dU/dC)}{d\gamma} > 0$, es decir, al aumentar la elasticidad de sustitución intertemporal, el incremento en el bienestar derivado del aumento en el consumo es mayor, porque las unidades adicionales de consumo reportan mayor utilidad. Es decir, como nuestro problema implica que existe una senda en la cual hay más consumo (pues su tasa de crecimiento estimada bajo estabilidad es mayor) y otra para la cual el consumo se encuentra siempre en un nivel inferior (creciendo a la tasa observada), cada vez que se tomen en cuenta mayores niveles de γ se tendrán mediciones de ganancia de bienestar de mayor magnitud.

$$U(\{C_t\}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \ln [C_0 (1 + 0,014)^t], \text{ para el caso logarítmico}$$

$$U(\{C_t\}) \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \frac{(C_0 (1 + 0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{1 - 1/\gamma}, \text{ para } \gamma \neq 1.$$

Bajo estabilidad, la tasa media de crecimiento anual del consumo per cápita se ubica en un intervalo entre 1,53% y 1,87%. El punto medio de este intervalo es 1,7%, tasa con la cual se harán los cálculos; entonces, la función de utilidad alternativa estaría formada por:

$$U'(\{C_t\}) \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \ln [C_0 (1 + 0,017)^t], \text{ para el caso logarítmico, y}$$

$$U'(\{C_t\}) \approx \sum_{t=0}^{52} \beta^t \frac{(C_0 (1 + 0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{1 - 1/\gamma}, \text{ para } \gamma \neq 1.$$

La razón entre la función de utilidad bajo un ambiente estable, donde el consumo crece a una tasa superior, y la función de utilidad bajo el escenario real, con un consumo que crece a la tasa media observada, es la pérdida de bienestar.

Tomando una tasa de descuento igual a la tasa de interés real de largo plazo (segunda mitad del siglo XX) para Colombia, $r = 5,5\%$ (Greco, 2002), el factor de descuento, β , sería igual a 0,95 ($\beta = 1/(1+r)$). Igualmente, la aproximación de la suma de términos hasta el infinito en las funciones de utilidad por medio de la suma de los primeros 53 términos tiene sentido puesto que, dado un factor de descuento igual a 0,95, esta representa aproximadamente 99% del total de la suma cuando el horizonte tiende a infinito. Con lo anterior, el cálculo quedaría así:

$$\frac{U'(\{C_t\})}{U(\{C_t\})} - 1 \approx \frac{\sum_{t=0}^{52} 0,95^t \ln [7.645(1 + 0,017)^t]}{\sum_{t=0}^{52} 0,95^t \ln [7.645(1 + 0,014)^t]} - 1, \text{ cuando } \gamma = 1.$$

Pérdida de bienestar =

$$\frac{U'(\{C_t\})}{U(\{C_t\})} - 1 \approx \frac{\sum_{t=0}^{52} 0,95^t (7.645(1 + 0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{\sum_{t=0}^{52} 0,95^t (7.645(1 + 0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1} - 1, \text{ cuando } \gamma \neq 1. \quad (16)$$

A su vez, la tasa de compensación en el consumo inicial de los individuos, μ , va depender de estos mismo resultados, pues ahora lo que se debe encontrar es aquella tasa (como porcentaje del consumo inicial) que haga cero la ecuación (16)³⁶; así se tiene que:

$$\mu = \left(\frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-\frac{t}{\gamma}}}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-\frac{t}{\gamma}}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \quad (17)$$

Los resultados de estos cálculos se presentan en el Cuadro 3. El costo en bienestar de las fluctuaciones económicas para el agente (segunda columna) va desde 0,07%, para el caso de una elasticidad de sustitución intertemporal igual a 0,75, hasta 2,51%, cuando la elasticidad es 2. La interpretación de estos resultados permite concluir que el agente recibiría en promedio un 1,34% más de utilidad cuando la senda de consumo crece 0,30 pp por encima de la media en la tendencia observada bajo el escenario fluctuante, demostrando que el agente podrá mejorar su bienestar significativamente en el caso de una estabilización económica.

Cuadro 3
 Pérdida de bienestar del agente por las fluctuaciones económicas según diferentes niveles de elasticidad de sustitución intertemporal del consumo, γ

Elasticidad de sustitución intertemporal del consumo ^{a/}	Pérdida de bienestar (ecuación 17) (%)	Tasa de compensación del consumo inicial, μ (%)
0,75	0,07	4,35
1,00	0,49	4,61
1,25	1,12	4,77
1,50	1,68	4,88
1,75	2,14	4,97
2,00	2,51	5,03

^{a/} Los valores de la elasticidad que se muestran aquí fueron seleccionados porque eran consistentes con el requisito de concavidad en la función de utilidad.
 Fuente: cálculos de los autores.

³⁶ Para $\gamma = 1$ se consideró, en la práctica, un valor muy cercano a 1 en la ecuación (17). El procedimiento completo para encontrar esta ecuación se presenta en el Anexo 1, sección C.

Así mismo, los resultados que corresponden a la tasa de compensación (columna tres) muestran que las familias deberían recibir un monto de consumo adicional, por una sola vez, equivalente a una cifra en el rango 4,35% - 5,03% (en promedio 4,7%) de su consumo inicial para hacerlas indiferentes entre una senda de consumo que crece en promedio más lentamente (en el escenario fluctuante) y una trayectoria estable que lo hace a un mayor ritmo.

VII. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

En este trabajo se consideró un método de estimación para el costo de los ciclos económicos colombianos, el cual estuvo dividido en dos etapas: estimación del modelo markoviano y reestimación del costo por medio de unas medidas de la volatilidad de la inversión. Considerando un intervalo entre 0,15 y 0,30 para el parámetro ψ asociado con la existencia de rendimientos decrecientes de la función de producción de bienes de capital, el método señaló un costo que osciló entre 0,28 y 0,50 pp del crecimiento anual del consumo per cápita.

No obstante, todavía faltaba reestimar el costo de los ciclos para un valor específico del parámetro ψ . Para esto se tenía que determinar la volatilidad empírica de la inversión compatible con el grado de retornos decrecientes: aquí se tenía un costo de oportunidad, pues la escogencia de volatilidades de la inversión de menor cuantía implicaba reducir el grado de retornos decrecientes de la inversión (mayor ψ) y, con ello, correr el riesgo de subestimar el costo de los ciclos.

Para medir la volatilidad de la inversión se utilizaron tres métodos de aproximación: en primer lugar, se consideró la serie de I/K y se escogió de allí el mayor y el menor valor para calcular la proporción entre la cima y el valle; este fue el nivel de volatilidad más bajo; una segunda vía consistió en la utilización de la q de Tobin, y se procedió con el mismo método anterior, es decir, se obtuvo también una razón entre su máximo y su mínimo valor; la tercera aproximación considerada, que utilizó el modelo de Paul Romer para hacer compatible el modelo AK con cifras de población laboral, arrojó resultados que se aproximaron a los estimados en el modelo de panel y señaló el nivel más alto de volatilidad. Según esto, la razón entre el mayor y el menor valor de la razón inversión-capital varía entre 2,5 y 19,06, el parámetro ψ entre 0,165 y 0,53, y el costo de los ciclos entre 0,13 y 0,47 pp en la tasa anual de crecimiento de largo plazo, según el orden de determinación fijado en el Gráfico 7.

Finalmente se realizó la medida para la pérdida de bienestar de las familias utilizando la función de utilidad *CRRA* con diferentes niveles de elasticidad intertemporal de sustitución. Los resultados por este lado mostraron efectos significativos de los ciclos en el bienestar; de manera específica, habría que compensar a las familias con un consumo adicional (por una sola vez) equivalente, en promedio, a 4,7% del consumo de 1950 para que les fuera indiferente la senda de consumo observada y una estable.

En resumen, puede decirse que los ciclos económicos colombianos de la segunda mitad del siglo XX tuvieron un costo, en términos de pérdida de tasa de crecimiento anual del PIB real per cápita, equivalente a una cifra ubicada entre 0,13 y 0,47 pp; esto significa que en ausencia de fluctuaciones económicas la tasa de crecimiento del PIB per cápita no habría sido la observada, 1,43%, sino que hubiera estado entre 1,56% y 1,9%; y la del consumo per cápita no hubiera sido 1,4%, sino una entre 1,53% y 1,87%.

REFERENCIAS

1. Arango, L. E. "Temporary and Permanent Components of Colombia's Output", Borradores de Economía, núm. 96, junio, Banco de la República, 1998.
2. Avella, M.; Fergusson, L. "El ciclo económico: enfoques e ilustraciones. Los ciclos económicos de los Estados Unidos y Colombia", Borradores de Economía, núm. 284, diciembre, Banco de la República, 2003.
3. Barlevy, G. "The Cost of Business Cycles under Endogenous Growth", *American Economic Review*, vol. 94, núm. 4, pp. 967-990, 2004.
4. Birchenall, J. A. "Inversión bajo incertidumbre en la industria colombiana", *Archivos de Economía*, núm. 64, agosto, Departamento Nacional de Planeación, 1997.
5. Cárdenas, M. "Estabilización vs. crecimiento: ¿Qué preferimos los colombianos?", *Coyuntura Económica*, vol. XXII, núm. 2, pp. 149-163, 1992.
6. Flórez, C. E. *Las transformaciones sociodemográficas en Colombia durante el siglo XX*, Bogotá, Banco de la República-TM Editores, 2000.
7. Gómez, J. G. "Una nota sobre el costo de las fluctuaciones económicas", *Ensayos sobre Política Económica*, núm. 21, pp. 191-208, 1992.
8. Gómez, W.; Posada, C. E. "Un choque del activo externo neto y el ciclo económico colombiano, 1994-2001", Borradores de Economía, núm. 285, abril, Banco de la República, 2004.
9. Greco. *El crecimiento económico colombiano en el siglo XX*, Bogotá: Fondo de Cultura Económica, 2002.
10. Gutiérrez, L. H.; Pombo, C. "Corporate Valuation and Governance: Evidence from Colombia", *Borrador de Investigación*, núm. 71, Facultad de Economía, Universidad del Rosario, 2005.
11. Hamann, F. "Sovereign Risk and Macroeconomic Fluctuations", Borradores de Economía, núm. 225, noviembre, Banco de la República, 2002a.
12. Hamann, F. "Sovereign Risk and Real Business Cycles in a Small Open Economy", Borradores de Economía, núm. 226, noviembre, Banco de la República, 2002b.
13. Hamann, F.; Riascos, A. "Ciclos económicos en una economía pequeña y abierta. Una aplicación para Colombia", Borradores de Economía, núm. 89, abril, Banco de la República, 1998.
14. Hamilton, J. *Time Series Analysis*, Princeton, Princeton University Press, 1994.
15. Imrohorglu, A. "Cost of Business with Indivisibilities and Liquidity Constraints", *The Journal of Political Economy*, vol. 97, núm. 6, 1989.
16. Lucas, R. *Modelos de ciclos económicos*, Alianza Universidad, cap. III, 1987.
17. Minford, P.; Peel, D. *Advanced Macroeconomics. A Primer*, Edward Elgar Publishing, 2002.
18. Misas, M.; Posada, C. E. "Crecimiento y ciclos económicos en Colombia en el siglo XX: el aporte de un VAR estructural", Borradores de Economía, núm. 155, agosto, Banco de la República, 2000.
19. Misas, M.; Ramírez, M. T. "Depressions in the Colombian Economic Growth During the XX Century: A Markov Switching Regime Model", Borradores de Economía, núm. 340, junio, Banco de la República, 2005.
20. Posada, C. E. "Los ciclos económicos colombianos en el siglo XX", Borradores de Economía, núm. 126, julio, Banco de la República, 1999.
21. Ramey, G.; Ramey, V. "Cross-country Evidence on the Link between Volatility and Growth", documento de trabajo, núm. 4959, *National Bureau of Economic Research*, 1995.
22. Reis, R. "The Time-series Properties of Aggregate Consumption: Implications for the Costs of Fluctuations", documento de trabajo, núm. 11297, *National Bureau of Economic Research*, 2005.

23. Suescún, R. "Commodity Booms, Dutch Disease, and Real Business Cycles in a Small Open Economy: The case of Coffee in Colombia", Borradores de Economía, núm. 73, junio, Banco de la República, 1997.
24. Zuccardi, I. E. "Crecimiento y ciclos económicos. Efectos de los choques de oferta y demanda en el crecimiento colombiano", *Archivos de Economía*, núm. 187, mayo, Departamento de Planeación Nacional, 2002.

ANEXO 1

A. SOLUCIÓN ANALÍTICA AL SISTEMA (15)

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi} = (1,62682769)^{1/\psi} \quad (15.A)$$

$$\frac{i_1 A_1}{i_0 A_0} = \left(\frac{q_1}{q_0} \right)^{1/1-\psi} = 2^{1/1-\psi} \quad (15.B)$$

Por igualación:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)^{1/\psi} &= \left(\frac{q_1}{q_0} \right)^{1/1-\psi} \\ \Rightarrow \frac{1}{\psi} \ln \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) &= \frac{1}{1-\psi} \ln \left(\frac{q_1}{q_0} \right) \\ \Rightarrow (1-\psi) \ln \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) &= \psi \ln \left(\frac{q_1}{q_0} \right) \\ \Rightarrow \psi \ln \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) + \psi \ln \left(\frac{q_1}{q_0} \right) &= \ln \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) \\ \Rightarrow \psi &= \frac{\ln \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right)}{\ln \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \delta}{\lambda_0 - 1 + \delta} \right) + \ln \left(\frac{q_1}{q_0} \right)} \end{aligned}$$

Para los valores considerados en este trabajo, la solución es:

$$\psi = \frac{\ln(1,62682769)}{\ln(1,62682769) + \ln(2)} = 0,412477147$$

B. MEDIAS Y VARIANZAS DE LOS TÉRMINOS DE PRODUCTIVIDAD
Y POBLACIÓN ESPECIFICADOS EN UN MODELO DE MARKOV DE DOS ESTADOS

Los resultados encontrados para Z son equivalente para N .

La media:

$$\begin{aligned} E(Z) &= p_0 Z_0 + p_1 Z_1 = p_0 \left(1 - \frac{p_1}{p_0} x\right) \bar{Z} + p_1 (1+x) \bar{Z} \\ &= (p_0 - p_1 x + p_1 + p_1 x) \bar{Z} = ((1-p_1) + p_1) \bar{Z} \\ &\Rightarrow E(Z) = \bar{Z} \end{aligned}$$

La varianza

$$\begin{aligned} Var(Z) &= (Z_0 - \bar{Z})^2 p_0 + (Z_1 - \bar{Z})^2 p_1 = \left(-\frac{p_1}{p_0} x \bar{Z}\right)^2 p_0 + (x \bar{Z})^2 p_1 \\ &= (x \bar{Z})^2 \left(\frac{p_1^2}{p_0} + p_1\right) = (x \bar{Z})^2 \left(\frac{p_1^2 + p_0 p_1}{p_0}\right) = (x \bar{Z})^2 \left(\frac{p_1^2 + (1-p_1)p_1}{p_0}\right) \\ &\Rightarrow Var(Z) = (x \bar{Z})^2 \left(\frac{p_1}{p_0}\right) \end{aligned}$$

Las desviaciones estándar y estándar relativa:

$$S.E(Z) = \sqrt{\frac{p_1}{p_0} x \bar{Z}}, \text{ y } sd(Z) = \sqrt{\frac{p_1}{p_0} x}$$

C. SOLUCIÓN PARA μ EN LA ECUACIÓN (17)

Como se dijo en el texto principal, la tasa de compensación es aquella que hace al agente indiferente entre las dos sendas de consumo consideradas; por tanto, la ecuación (16) debe ser cero.

$$\frac{U'(\{C_t\})}{U(\{C_t\})} - 1 \approx \frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1} - 1 = 0$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 1}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 1} = 1$$

Y despejando para μ :

$$\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} - 52 = \sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma} - 52$$

$$\sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+0,017)^t)^{1-1/\gamma} = \sum_{t=0}^{52} \beta^t (C_0 (1+\mu)(1+0,014)^t)^{1-1/\gamma}$$

$$C_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma} = (C_0 (1+\mu))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}$$

$$\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma} = (1+\mu)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}$$

$$(1+\mu)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma}}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}} \right)$$

$$\mu = \left(\frac{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,017)^{t-1/\gamma}}{\sum_{t=0}^{52} \beta^t (1+0,014)^{t-1/\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \tag{17}$$

Cuadro A1
 Series estadísticas

Año	Producto	Inversión	Consumo	Capital físico	PEA
1950	117.454,29	26.917,00	86.382,67	358.871,00	4.019.784,22
1951	120.741,68	25.158,00	86.818,21	373.007,73	4.076.022,68
1952	128.407,88	26.380,00	92.480,18	388.016,63	4.156.676,76
1953	134.953,19	27.967,00	97.939,26	404.218,53	4.238.926,78
1954	144.625,39	35.628,00	106.749,47	427.349,63	4.322.804,32
1955	150.362,22	37.762,00	110.916,84	451.758,59	4.408.341,58
1956	157.506,80	39.006,00	113.084,33	476.518,84	4.503.002,59
1957	162.822,99	38.920,00	115.582,40	500.440,63	4.599.696,28
1958	165.915,84	32.271,00	117.539,18	517.430,70	4.698.466,29
1959	177.806,25	33.723,00	123.565,41	535.637,14	4.799.357,20
1960	184.931,72	39.337,00	129.322,94	559.191,45	4.902.414,55
1961	194.432,36	43.889,00	137.703,88	586.776,29	5.030.150,12
1962	204.612,91	38.185,00	149.080,31	608.067,09	5.161.213,92
1963	211.178,39	38.689,00	156.581,56	629.317,04	5.295.692,67
1964	223.915,01	44.018,00	170.728,66	655.461,54	5.433.675,36
1965	232.906,36	43.589,00	168.722,53	680.584,54	5.568.284,48
1966	245.865,31	54.757,00	184.263,97	716.409,58	5.740.427,74
1967	254.984,65	43.058,00	186.751,85	740.001,02	5.917.892,81
1968	270.928,34	54.000,00	198.002,94	774.010,13	6.100.844,19
1969	288.101,96	54.345,00	213.687,73	807.634,81	6.289.451,52
1970	307.496,00	63.148,00	226.529,00	849.357,13	6.483.889,62
1971	325.825,00	65.844,00	242.810,00	892.812,10	6.748.479,15
1972	350.813,00	64.244,00	258.195,00	933.611,50	7.023.865,85
1973	374.398,00	70.073,00	270.549,00	979.256,45	7.310.490,31
1974	395.910,00	83.967,00	286.171,00	1.037.759,84	7.569.117,73
1975	405.108,00	68.838,00	293.239,00	1.079.952,66	7.836.894,76
1976	424.263,00	75.245,00	314.234,00	1.127.466,61	8.104.742,56
1977	441.906,00	87.468,00	326.831,00	1.185.914,09	8.381.744,81
1978	479.335,00	93.516,00	354.067,00	1.249.195,86	8.668.214,38
1979	505.119,00	93.220,00	367.061,00	1.310.719,56	8.964.474,86
1980	525.765,00	103.358,00	384.539,00	1.380.806,43	9.270.860,86
1981	537.736,00	117.037,00	393.952,00	1.462.712,65	9.568.054,44
1982	542.836,00	123.279,00	400.255,00	1.548.900,49	9.874.775,07
1983	551.380,00	120.628,00	407.095,00	1.630.471,44	10.191.328,17
1984	569.855,00	113.521,00	418.556,00	1.703.056,72	10.518.028,92
1985	587.561,00	102.574,00	426.474,00	1.762.896,21	10.855.202,64
1986	621.781,00	107.038,00	444.638,00	1.825.816,83	11.234.239,67
1987	655.164,00	116.901,00	461.568,00	1.896.998,49	11.626.511,75

Cuadro A1 (continuación)
Series estadísticas

Año	Producto	Inversión	Consumo	Capital físico	PEA
1988	681.791,00	126.264,00	472.655,00	1.975.763,47	12.032.481,01
1989	705.068,00	117.013,00	489.050,00	2.043.217,97	12.452.625,72
1990	735.259,00	115.641,00	502.475,00	2.107.457,75	12.887.440,85
1991	749.976,00	105.537,00	509.359,00	2.159.849,51	13.319.165,80
1992	780.312,00	150.902,00	522.028,00	2.256.251,37	13.765.353,39
1993	822.335,00	208.549,00	554.223,00	2.408.528,07	14.226.488,11
1994	870.151,00	264.258,00	590.160,00	2.613.100,51	14.678.599,88
1995	915.420,06	235.702,87	615.591,00	2.784.661,84	15.145.079,57
1996	934.239,77	207.371,53	619.055,06	2.923.221,55	15.614.633,87
1997	966.286,94	206.034,33	635.494,62	3.056.060,28	16.098.746,12
1998	971.678,31	191.056,02	621.776,94	3.169.852,85	16.597.867,67
1999	930.398,29	129.684,99	590.458,66	3.218.882,87	17.112.463,86
2000	956.445,73	145.668,03	616.444,96	3.282.215,19	17.643.014,47
2001	970.520,00		631.647,89		19.330.316,86
2002	989.246,98		647.678,57		19.889.078,07

Fuentes:

Producto: los datos entre 1950 y 2000 son calculados por el Greco (2002). Para 2001 y 2002 se utilizaron las tasas de crecimiento del PIB publicadas por el DANE.

Inversión: Greco (2002)

Consumo: los datos entre 1950 y 2000 son calculados por el Greco (2002). Para 2001 y 2002 se utilizaron las tablas de publicación del Banco de la República para el consumo de los hogares con precios de 1994 y se convirtieron a pesos de 1975.

Capital físico: Greco (2002).

PEA: los datos entre 1950 y 2000 son del Greco (2002). Para 2001 y 2002 se tomó la tasa bruta de participación dada por OIT (44,02% y 44,4%).

Cuadro A2
Cálculos de la q de Tobin mencionados en el texto

Resumen	1998	1999	2000	2001	2002
Promedio ponderado ^{a/}	1,067	0,890	0,786	0,787	0,725
Promedio simple	1,355	1,200	1,019	0,838	0,716
Mediana	0,906	0,837	0,807	0,717	0,684
Mínimo	0,193	0,234	0,091	0,250	0,220
Máximo	24,372	21,922	9,418	5,515	1,487
Empresas	101	86	73	61	54
Desviación estándar	0,02	0,018	0,017	0,022	0,029

^{a/} ponderado por activos totales de cada empresa.

Fuente: Superintendencia de Valores, Bolsa de Valores de Colombia. Tomado de Gutiérrez y Pombo (2005).